天体力学浅谈

〔苏联〕尤·阿·里亚波夫



科学普及出版社

天体力学浅谈

〔苏联〕尤·阿·里亚波夫

李 珩　陈晓中　译

科学普及出版社

内 容 提 要

这是一本介绍天体力学基本概念的中级科普读物。它对行星、卫星等的运动以及受干扰后的摄动运动，尤其是对研究这些运动的基本思想和方法，作了简明扼要的介绍。在叙述中尽量避免繁杂的数学推导，而用浅显易懂的文字表达。本书对天文、数学、物理爱好者是一本很好的辅助读物，同时对教学和科研人员也是一本较好的参考书。

天体力学浅谈

（苏联）[illegible]·阿·里亚波夫

李 珩、陈晓[illegible]译

责任编辑：王[illegible]民

封面设计：[illegible]文进

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

密云县卫新综合印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：6 1/2 字数：141千字

1984 年11月第1版　　1984 年11月第1次印刷

印数：1—5,700册　　定价：0.85元

统一书号：13051·1385　本社书号：0775

导 言

我们仰望天空，可以见到恒星、行星、月亮、太阳和其它发光的天体。它们日复一日、年复一年、一个世纪又一个世纪地在天球上运行着，在天穹上描绘出错综复杂的路径。天体的复杂运动，只不过是它们在无边无际的宇宙空间里更加复杂的运动的表现而已。而且，我们居住的地球也是一个在空间运行不息的天体。

天体究竟怎样运动，这些运动彼此之间究竟有怎样的关系？自然界里有什么力量在支配着这些运动？

今天，我们对于这些问题已经能够给出相当完满的答案。我们知道，地球和行星在空间里围绕太阳运行，形成所谓**太阳系**，而太阳本身又是一个名叫银河系的巨大星系里的一个成员；太阳与其它恒星又围绕银河系的中心在空间里运行。我们还知道，地球、行星、太阳和恒星的运动，主要由它们之间的相互引力所支配。这种相互作用的定律——万有引力定律——于17世纪为伟大的英国科学家牛顿所发现。

天体力学——研究天体运动的科学——已经利用万有引力定律取得卓越的成就。现在我们已经能够对某些天体运行制订出确切的“时间表”，说明一个给定的天体于任何一个给定的时刻，到达天穹上的什么位置。而且这些天体，必然按时到达所指定的“地点”，或许比火车正点到站还要准确。

天体运行时间表，往往不是制订出一天或一年的，而是制订出几十年或几百年的。在某些情况下，我们甚至还可以

描绘出几千年前我们的远祖所看见的天体运动，并且还可以预测几十代人以后将要出现的天象。

自然，天体力学不是在一个短时间内建立起来的。若干世纪以前，人们便开始寻找天象变化的原因，并在漫长的道路上，不断出现错误和失望。而且，追求真理的斗争有时是很激烈的。即使到今天，我们对于天体运动的知识也还远没有达到完善的境界。我们还不能够制订出任何天体的运动的足够精确的“时间表”。有时，表上还会出现误差：有些天体早到，有些迟来。而且我们也并不总是能精密而确切地断定某个天体在过去若干年前或将来若干年后怎样运行。

本书的目的是为读者叙述万有引力是怎样发现的，以及我们怎样根据该引力定律来研究天体的运动。读者可以从本书了解到最遥远恒星的运动、流星的陨落以及人造卫星和宇宙火箭的飞行，这些都是遵守万有引力定律的。

最后，我们还要简略地谈谈引力的性质。

目　录

1、太阳、月亮、行星和恒星运动的古代概念

很久、很久以前，人们已开始研究天体的运动。许多世纪以前，古人就观测天体在天空中的位置与运动，并且追求这些运动的规律，鼓励他们从事这一研究的动力，主要是实际的需要。只有通过观测天体，人们才能知道自己在海洋或沙漠中的位置，才能测定时间和预知一年四季，农业和商务以及游牧民族的迁徙，全都需要观测恒星。就是这些迫切的实际需要才产生了天文学。

天体在天穹上的视运动，在远古时代已经为众所周知了。

黑夜里人们注视布满繁星的天空，便会得到这样一个印象：上面是一个圆顶形的天球，围绕着地球旋转，每24小时一周。天穹的周日旋转，日复一日作有规律地重演，而没有什么显著的变化。

天上的恒星相对位置好象是固定不变。因此它们被称为“恒星”。许多年代以前天文学家们已经描绘出不同星座以及整个星空的天穹图。

一切天体无例外地都参与围绕地球的周日旋转。如果一个给定的天体在星星之间保持相对位置不变，它就被叫做恒星。反之还有另外一类天体除参加周日运动外，而且还横越恒星而运动，这便不是恒星。

自古以来人们就知道有七个天体，在恒星间运动的，它们叫做行星(planet这个字在希腊文里的意义是“流浪者”)。不过这里要指出两类：首先，它们之中包括五个比一般恒星明亮得多的天体，就是水星、金星、火星、木星和土星。其次，古代人们认为行星里还包括太阳和月亮，因为它们也在恒星间运动。

最容易引起人们注意的是月亮的运动，因为它比别的天体运行更快。月亮在天空上由西向东运行一周的时间只有27·3日（即每日行12至13度，或大约每小时半度）。只要连续两个夜晚，人们便可看出它在恒星间改变了位置。观测发现，月亮穿越天空的运动不是等速的，在某些区域快些，某些区域慢些。

我们不能直接观测太阳在恒星间的运动，因为白天不能看见恒星；但是太阳的运动可以通过对恒星的观测来测定。在日落后注意西方天空上某一颗恒星，并确定它的位置；这样连续几天在同一时刻观测，你便会发现，这颗星的位置不断向下移动，逐渐接近太阳。以后几天内，它便完全消逝在地平线下了，它原来的位置被另外一颗位于西天的恒星所代替。这颗星也将逐渐和太阳接近，象前一颗星那样消逝了。这说明太阳相对于恒星的位置在不断地改变。从古代开始，人们便对恒星在天球上的位置作每日的观测。这些观测使人们相当精确地了解太阳横越天穹的轨迹，于是发现太阳在恒星间由西向东运行（月亮也一样），太阳每$365\frac{1}{4}$日(即一年）运行一周。太阳在恒星间的周年轨迹年复一年保持稳恒，这个轨迹叫做**黄道**，每天太阳在黄道上运行大约一度（即一年内约365度）。太阳的运动也和月亮运动相似，不

是均匀的，在冬季比在夏季运行较快。例如6月1日至6月30日它走了27°.5，但在12月1日至30日内却走了29°.5。

行星视运动的图象更加复杂。诸行星有一个共同的特征便是：它们常在黄道附近运动。行星分为两群，即内行星与外行星。❶

第一群里有水星和金星，第二群里便是所有另外那几颗行星。内行星的特征是它们在太阳周围绕其平均位置摆动，起初内行星在恒星间比太阳运行快，而超过了它，在达到太阳的东面最远之点后，开始比太阳运行慢些，太阳便赶上了它。在西边落后于太阳一段距离后，内行星又开始运动得比太阳快，这样周而复始地重演下去。例如金星离开太阳的最大距离约为40°，水星平均约为23°（在18°与28°之间变化）。因此内行星只在早晨日出前不久在东方和日落后不久在西方才看得见。

水星围绕太阳的视摆动周期约为116日，而金星则为1年又217日。

外行星在天空上描绘出特殊的环圈。

行星在恒星间的运动与太阳和月亮一样，一般是由西向东（称为**顺行**）。可是，有时行星视运动的速率减小。以致停止不动（**留**），然后掉转方向由东向西运动（**逆行**）。每个行星自逆行复返于顺行有一定的周期。结果使行星在天空中描绘出特殊形状的环圈（图1）。火星每780日，木星399日，土星378日，各描绘一圈。

---

❶ 古代人将这两群行星叫做下行星与上行星。他们认为行星都围绕作为宇宙中心的地球运动。由于水星和金星比太阳更接近地球，因此称为下（低）行星；其它行星比太阳更远，因此称为上（高）行星。

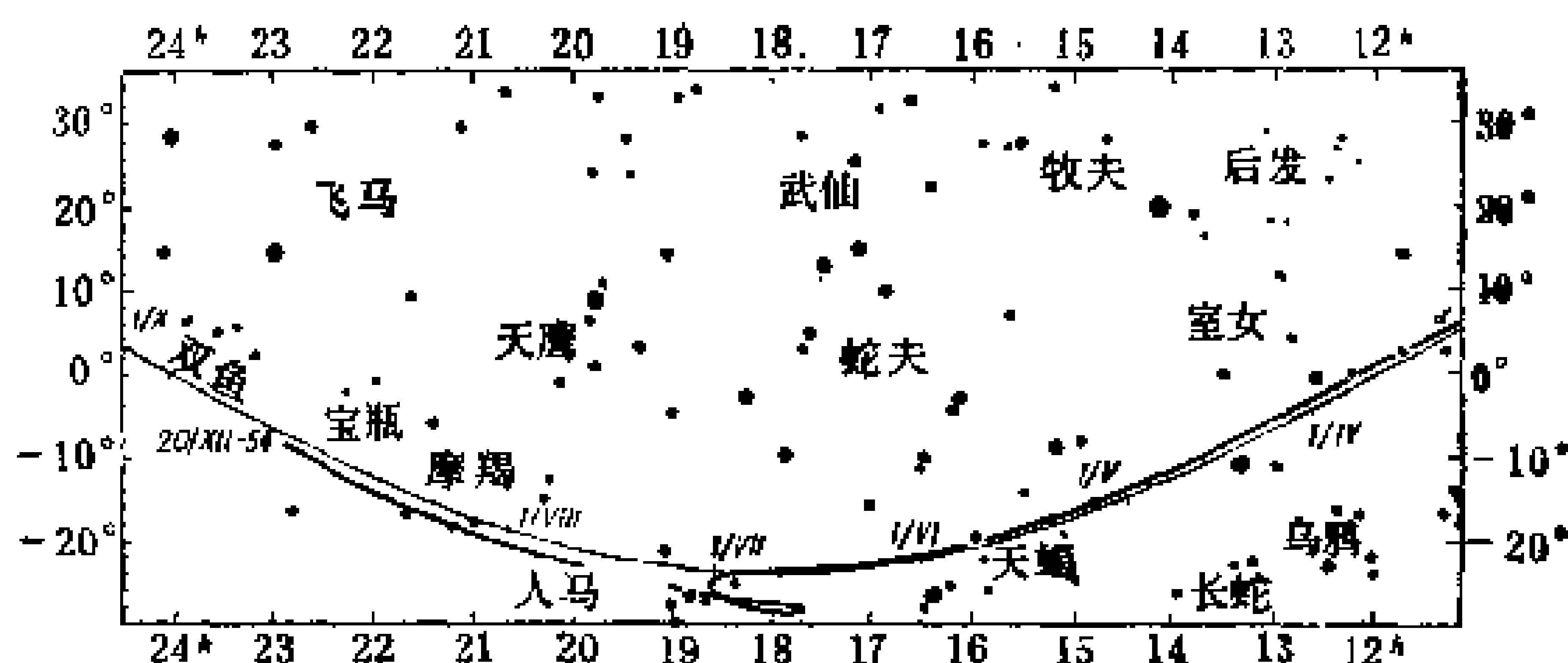


图1 1953年10月10日 至 1954年12月20日 期间，火星的视行径，
和同年3月至10月间太阳的视行径（黄道）

这些便是从地球上看恒星和行星在天空上的视运动。但是恒星、太阳、月亮和行星在空间里的真实运动究竟是怎样的呢？

最早试图解释观测得来的天体运动，建立起天体运动理论，以预言某个天体在一定时刻在天穹上位置的是古希腊的学者。他们的出发点，是将地球看做是不动的中心，太阳、月亮、行星和恒星都围绕它运行。

古希腊人对比了“天”与“地”的现象，认为支配“天”与“地”的规律是大不相同的。天体永恒的循环运动，在他们眼里是最完美的典范，而且由于他们认为匀速圆运动是最完美的运动，因此月亮、太阳和行星应确切无疑地作等速圆运动。可是这些天体的视运动都不是匀速运动。太阳和月亮的速率都不是均匀的，而行星还在描绘复杂的环圈。于是古代希腊天文学面临这样一个问题：在匀速圆运动的基础上去解释行星的视运动。

天体运动较精细的理论为公元二世纪时古希腊天文学家托勒玫（Claudius Ptolemy）所发展。他假设太阳、月亮和行星都在所谓本轮的圆周上作匀速运动，同时每个本轮的中心又在一个较大的圆周（均轮）上作匀速运动，不动的地球位于在均轮的中心（图2）。在图中，行星在本轮上运动的速率 V_1 大于本轮中心在均轮上的运动速率 V_0。行星P与本轮中心在同一方向上运动的一段时间内，地上的观测者E所看见的是顺行。但是如果在本轮中心与地球之间运动时，那么行星的运动与本轮中心的运动"抵消"一部分，注意 $V_1>V_0$，于是从地球看去，行星便在作逆行运动。

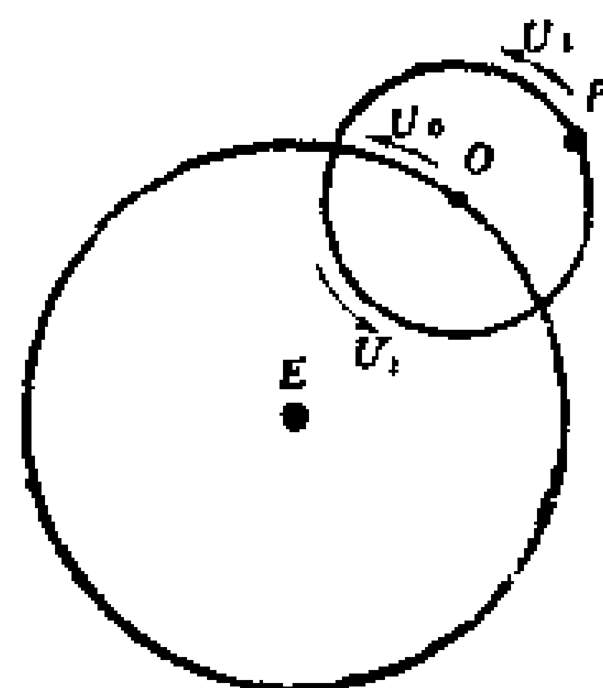


图 2 本轮与均轮速度 V_1大于V_0

由于为太阳、月亮和每个行星选择适当的均轮和本轮的半径之比，本轮和均轮的轨道周期，以及均轮和本轮的平面的交角等要素，托勒玫不但解释了这些天体穿越天空的非均匀的视运动和行星的逆行，而且还相当准确地计算出行星、太阳和月亮穿越天空的轨迹。

托勒玫体系，以及就一般地说，若将地球看成静止的天体的学说，从2世纪至16世纪中叶盛行了十四个世纪，可是在托勒玫以前，古希腊学者如菲洛劳斯（Philolaus，公元前五世纪）和萨莫斯的阿里斯塔恰斯(Aristarchus，公元前三世纪）以及其它人，却曾提出过地球在空间运动，此外还绕本身的轴旋转的见解，按他们的理论，人们所看到的天球和所有恒星的周日旋转，只是地球自转的表观现象。但是这些思想家未能提出精密的计算方法，以预测行星在天球上的位置，从

而满足天文学的实际需要，因而他们光辉的臆想并没有得到普遍的接受。

托勒玫体系的长期流行，当然不仅是由于当时的科学水平低。问题是以地球在中心的宇宙适合于宗教的理想。根据宗教的教义既然人是“上帝的最高成就”那么人所居住的地球自然应当位于宇宙的中心。这样托勒玫的宇宙论就为宗教服务。当然僧侣们要对主张无神论的萨莫斯的阿里斯塔恰斯的地球运动学说进行攻击，正如18世纪基督教教士们猛烈攻击哥白尼体系一样。

但是托勒玫体系终于走进了死胡同，因为随着新的观测数据的积累就检验出托勒玫理论预测的行星位置与实测之间的更多不符合。为了消除这些偏离，就假设每个行星的运动不只由一个本轮，而是由一系列本轮来描述（图3）。行星运动上每次发现一个新的不规则性便要增加愈来愈多的本轮去消除它。然而理论与观测总是不能符合。

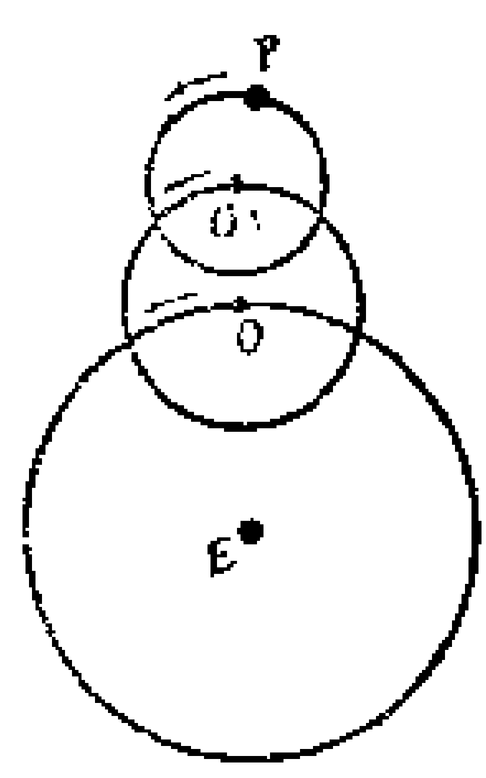


图 3　一个复杂的本轮体系

一方面这种复杂的本轮体系极端不便，显然是人为的，另一方面理论与观测总是不能符合，终于使人怀疑其真实性。天文学家终于不再设法增加本轮来“改进”托勒玫体系，而索性把它扔掉。16世纪伟大的波兰天文学家哥白尼(Nicolaus Copernicus, 1473～1543)首先提出了地球和行星都围绕太阳运动比较完满的理论。实际上这是人们认识天体在空间里真实运动的起点。

2、从哥白尼到开普勒的行星运动几何学

认为地球是静止的主张统治了许多代人的思想，哥白尼首先扔掉了这个武断的主张。根据他的理论，地球和其它行星一样，在围绕太阳运动，同时它还绕一条被人叫做地轴的设想的直线自转。哥白尼正确地解释了恒星及其它天体在天球上的周日运动，认为这不是它们的天体运动，而是地球自转造成的现象。地球约24小时自转一周，地面上的人并不感觉到有什么运动，看见的似乎是天球带着依附在它上面的太阳、恒星和行星在旋转。

根据哥白尼体系，太阳的周年轨迹不过是地球围绕太阳在空间里运动所造成的视运动。地球围绕太阳运动，地面上的人看见太阳在比太阳遥远得多的恒星构成的背景上移动。这便是在我们眼里太阳好象是在恒星间运动的原因。

哥白尼说明，行星视运动的主要特征可以用这样一个事实来解释：行星（包括地球在内）沿相同的方向，但在不同的距离处，以一定的周期一起围绕太阳运动。

根据观测事实推断，哥白尼得出结论，所有行星和地球绕太阳运动大致在同一平面内。这解释了为什么从地球看行星的轨迹都接近黄道。既然水星和金星好象是在太阳两侧摆动，那么它们在空间的路径（用天文学的术语来说就是它们的轨道），比地球的轨道更接近太阳，因为金星对太阳的视偏离角度比水星对太阳的视偏离要大，所以金星比水星离太阳远。

其他行星与地球相比，是在更大的距离上绕太阳运动。

和地球最接近的是火星（这是很明显的，因为它在恒星间运动最快），接着依次是木星和土星。

至于行星轨道的形状和行星运动的类型，哥白尼认为，所有的行星都是在作近似匀速的圆运动，不过在匀速圆运动上迭加一些附加的摆动。更确切地说，哥白尼认为，在圆周上作等速运动的不是行星本身，而是行星在其上面运行的本轮或本轮系的中心。行星在本轮上运动，表征着它对围绕太阳的匀速圆周运动的偏离。

哥白尼是描绘出正确的太阳系图象的第一位天文学家（图4）。他确定了行星与太阳间的相对距离（以日-地间的距离为单位）以及它们围绕太阳运行的周期。以下略述他的计算方法。

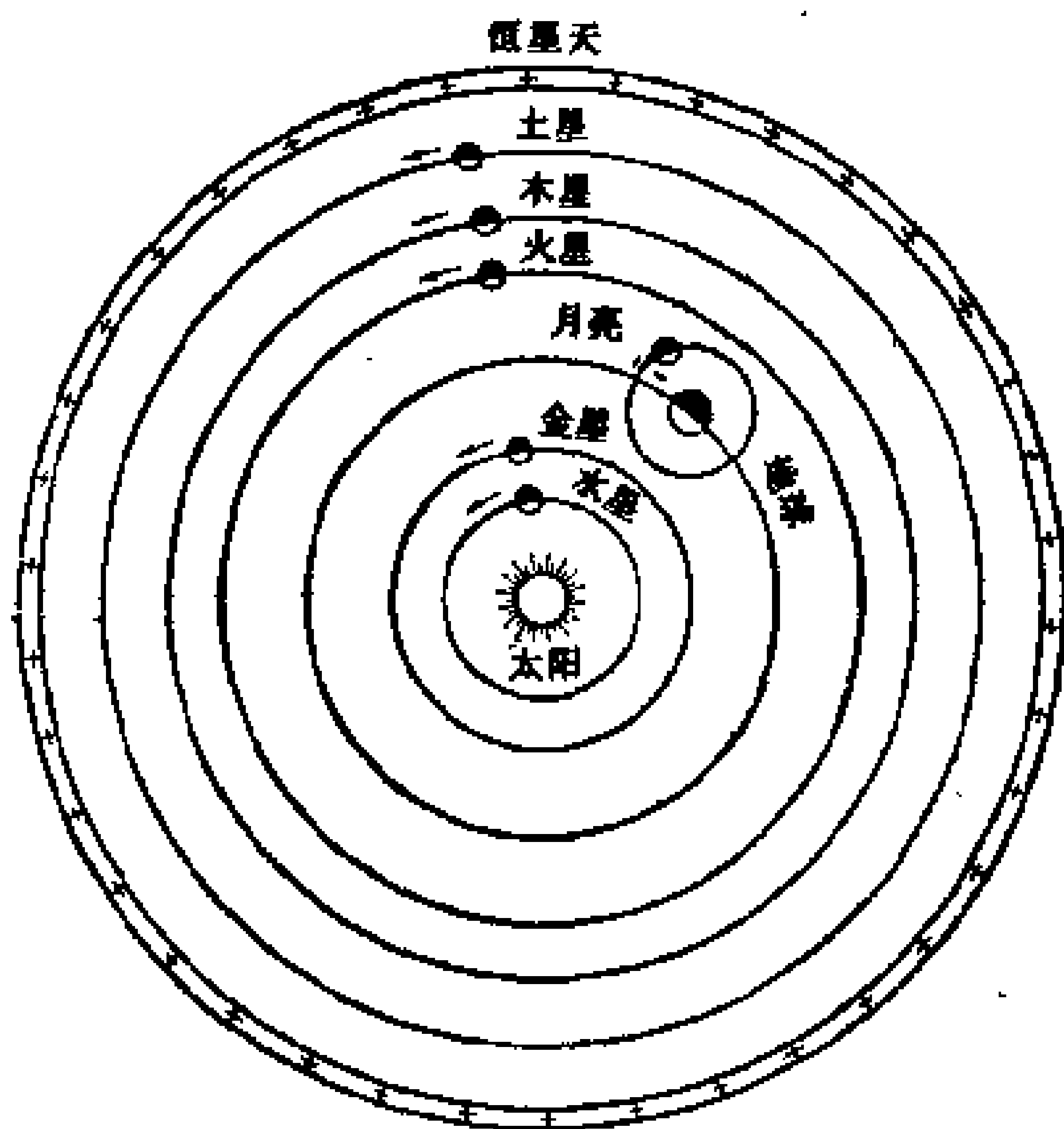


图 4　哥白尼体系

试以比地球更接近太阳的水星为例来讨论。图5的内外两圆分别表示水星和地球的轨道，箭头表示运动的方向。由图可见，从地球看，水星应当在太阳附近摆动。E_1和M_1分别表示水星在西大距时地球和水星的位置。那时水星-太阳间的角距离❶平均大约是23°（哥白尼借助于本轮说明这角距离在18°至28°之间摆动）。

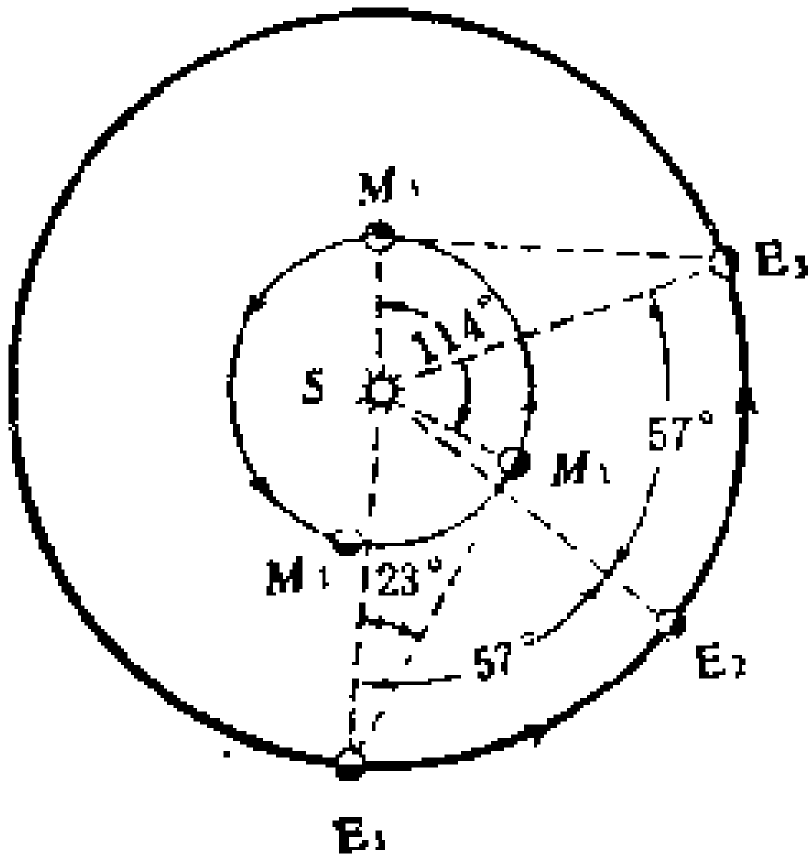


图 5 决定水星-太阳间的距离和它绕太阳运行的周期

因为SE_1M_1三角形是直角三角形，所以由三角学得：

$$\frac{SM_1}{SE_1} = \sin 23° \doteq 0.39$$

可见水星-太阳间的平均距离等于地球-太阳间的距离的39%。

前面曾经指出，水星围绕太阳视摆动的周期约116日，这意味着西大距以后58日水星-太阳间的角距离又出现一次极大值，但是在东方。可是地球与水星都将处在它们轨道上的其它位置，以E_2和M_2表示。E_1E_2弧的长度容易求得，因为已知地球绕太阳运行的周期为365.25日。在58日内地球在它的轨道上约运行全周的0.159，即相当于57°的弧。再经过58日，水星又到了西大距，我们以M_3和E_3分别表水星和地球那时的位置。这样在116日内地球走过的E_1E_3弧，长度为

❶ 从观测者的眼睛引向两个天体的直线之间的夹角叫做角距离。

57°+57°=114°。在这段时间内，水星绕太阳走了一周多，因此它的视运动周期并不与它的轨道周期相合。但后者是容易计算的。

由图5可见，SE_1M_1三角形的一边SE_1转过114°而到SE_3的位置，同时引线SM_1也转过了114°到SM_3，即$\angle M_1SM_3=114°$。因此在116日内水星围绕太阳运动了一周加114°，即474°的弧。水星的轨道周期，即在轨道上运行一周(360°)所需要的时间，可从下列比例求得：

$$\frac{T}{116}=\frac{360°}{474°}$$

所以 $T=\frac{360\times116}{474}\doteq88$(日)。

同样，我们可以算出金星-太阳间的距离和金星轨道周期。金星的轨道周期是225日，而它对于太阳的平均距离为地一日间的距离的0.72（即72%）。

至于外行星的周期和它们与太阳的距离，可以用不同的方法确定。

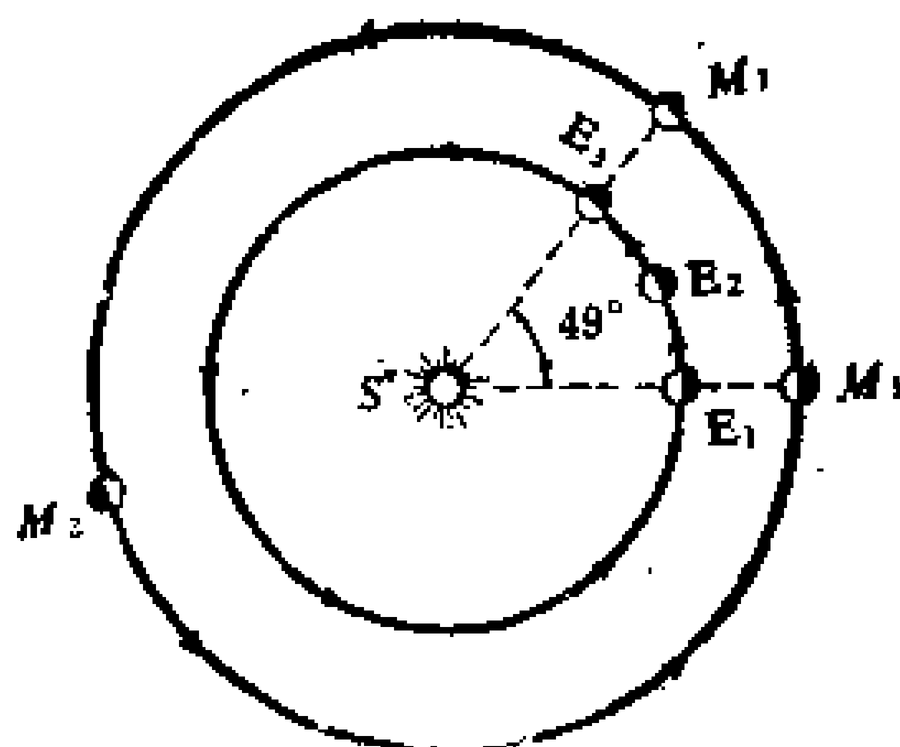


图 6 决定火星的公转周期

例如火星。在图6里，内外两圆分别表示地球和火星的轨道。设以E_1和M_1分别表示火星和太阳在一直线上地球两侧时，地球和火星的位置(这种组态叫做冲)。由观测得知每780日火星冲日一次。冲后390日地球来到E_2，火星将与太阳S在一条直线上，并在地球的同一侧（这组态叫做合）。再过了

390日，火星再度冲日，地球将在E_3而火星在M_3。在780日内地球围绕太阳走过两周加上大约49°的E_1E_3弧，即总共走过769°。由图6可见，同时火星走过一周又49°即总共409°。使用下列比例式可以求出火星的轨道周期为：

$$T=\frac{360\times 780}{409}\doteq 687\text{（日）}$$

木星和土星的轨道周期可以用相同的方法确定，结果求得分别为12年与29.5年。

现在决定火星-太阳间的距离。从冲开始，我们在地球上测量太阳与火星之间的角距离（图7）。冲时这个角是180°。之后这个角开始变小，过了一个时候它达到90°∠SE′M′。由观测得知，这发生于冲后106日。这段时间内，地球转过的弧约

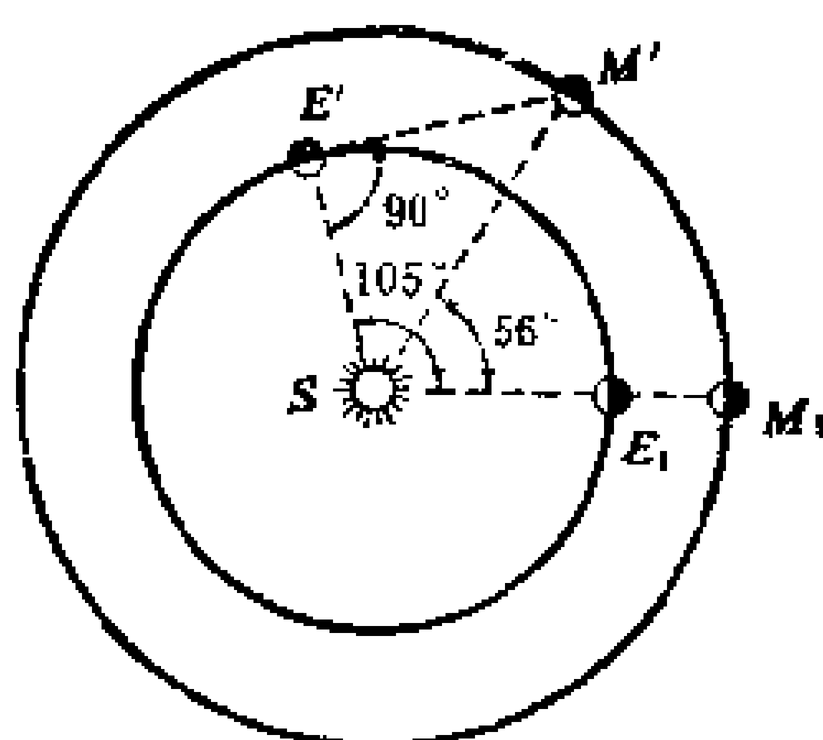


图 7　决定火星-太阳间的距离

105°，与此同时火星大约走了$\frac{360\times 106}{687}\approx 56°$

于是∠E′SM′ = 105°−56° = 49°。由三角形E′SM′得：

$$\frac{SM'}{SE'}=\frac{1}{\cos 49°}\approx 1.5$$

因此火星距离太阳约为日-地距离的一倍半。

同样可以求得木星和土星相对于太阳的距离。结果算出，这两个外行星与太阳的距离分别为日-地距离的5.2和9.5倍。

哥白尼证明，行星的圈状视轨迹，可以用我们是在绕太

阳运行的地球上观测行星的事实来解释。让我们利用图解来考察火星从冲时E_1M_1(图8)开始后，是怎样运动的。冲后一段时间地球将抵达E_2，而同时火星在它轨道上走了一段较小的弧M_1M_2(因为它的周期长些)。冲时火星在E_1M_1方向上，冲后一段时间从地球上看它在E_2M_2方向上，

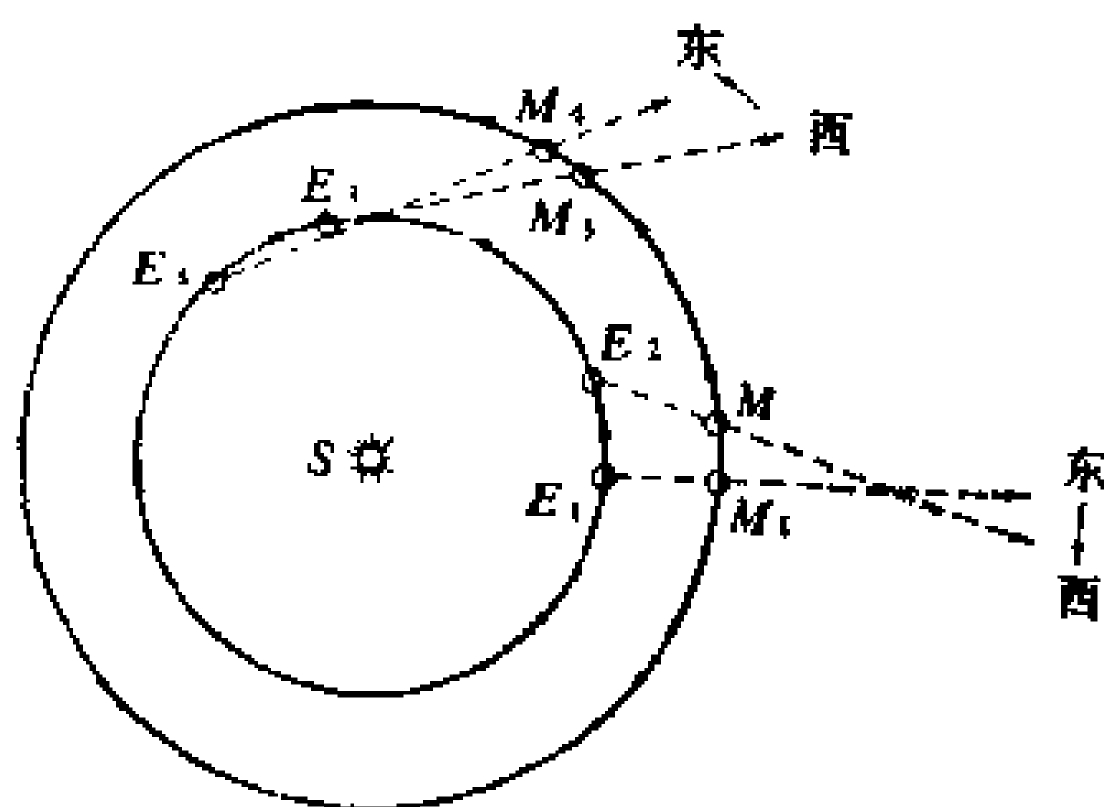


图 8 行星视运动的解释

相对于E_1M_1方向来说它在西行。好象地球在绕太阳运动中赶过了火星，因而对地球上观测者所造成的印象是火星在恒星间离开其原来的位置西行了，尽管事实上，火星在与地球相同的方向上沿着它的轨道继续运行。

现在再看地球和火星分别达到E_3与M_3时(即从地球上看火星与太阳两个方向形成直角时）它们之间的联线发生了怎样的改变(图8）。一段时间以后，地球和火星分别达到E_4和M_4。这时E_4M_4对于E_3M_3是指向东的，换言之火星在恒星间由西向东运行。因此，地球在它的轨道上运行E_1E_4弧时，火星（视运动）先在恒星间由东向西逆行，然后由西向东顺行。在M_1与M_4之间的某一点，火星好象停止运动(图9内的Es和Ms方向上），而在恒星间掉转其运动的方向。

观测表明，火星冲后大约35日出现留，然后再由逆行转为顺行。在下一次冲前大约35日，地球和火星分别达到E′s与M′s(即Es和Ms对于EM的镜像)(图9)，那时火星再掉转方向逆行。因此，冲前35日和冲后35日总共70日内，火星继续

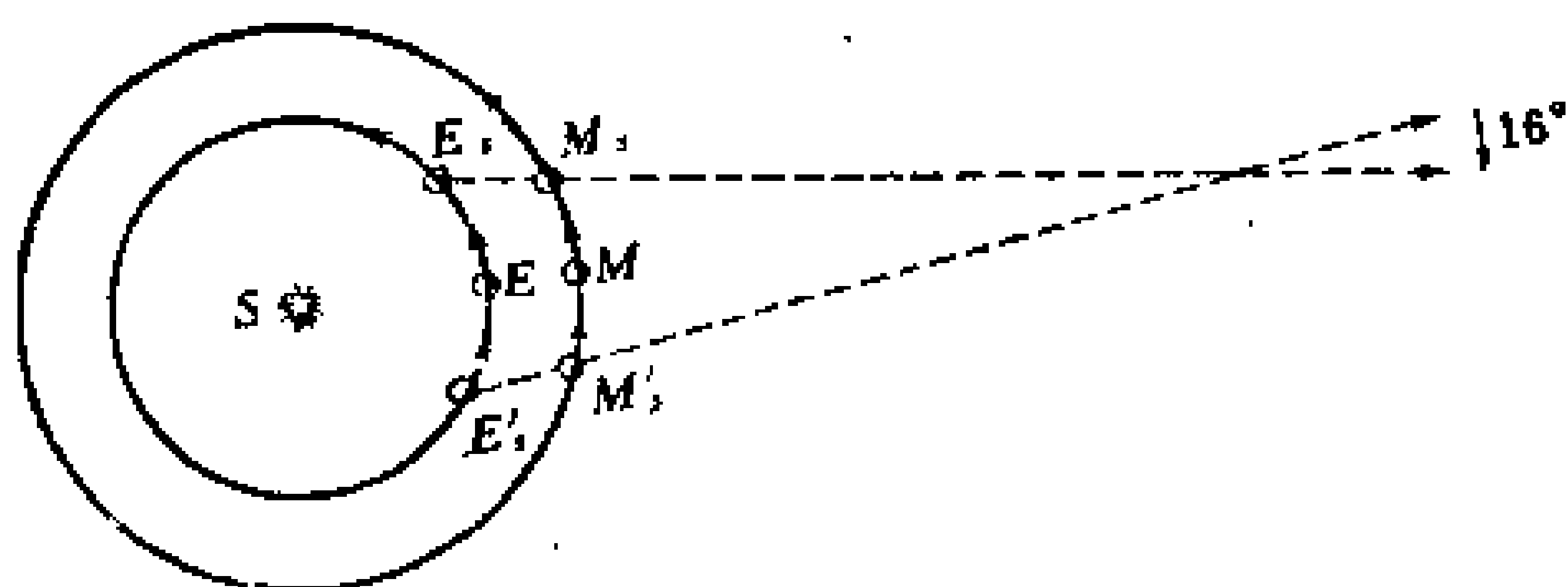


图 9 行星的逆行

逆行。火星在这段时间内逆行所走的弧约16°。

哥白尼便这样解释了火、木、土三个外行星的逆行运动。但是在解释其他行星对于等速圆运动的偏离的时候，他仍然保留古代天文学的本轮体系。哥白尼的月球理论更加复杂，古代天文学家早已发现月球运动里有许多不规则之处。

纵然如此，哥白尼体系仍然是天文学进步的一个新阶段。哥白尼是使太阳、地球和行星各得其所的第一个人。就整体来看，他绘出了地球和行星井然有序的体系的正确图象。他成功地确定了行星运动的最主要的特征：即行星的轨道周期及其与太阳的距离。

但是哥白尼学说的影响，远远超出天文学本身的范围。哥白尼首先要求天文学的理论必须反映实际，反映事物的真相，而不是为了注释宗教的教义。因此哥白尼学说对基于传教士著作的宗教世界观是一个沉重的打击，因而他的名字成了进步科学的旗帜。

无怪哥白尼的理论遭到教会的仇视，因为他将地球降低为一个普通的行星，而将太阳放在太阳系的中心。地球不再是"圣经"所认为的世界的中心。1616年天主教宣布哥白尼体系是一种邪说并禁止它。其实在那以前新教的领袖们已经在

积极地反对这个新的理论了。

自然，这一切极大地阻碍了哥白尼理论的传播。但是我们也应当注意哥白尼并没有提出地球运动的直接的证据。我们可以说的，只是他的理论比托勒玫体系对于行星视运动的解释简单而且自然。可是，哥白尼体系还不能以足够的精确度预测行星的位置。

虽然这样，哥白尼的观点还是逐渐为人们接受。在这个太阳系新方案的发展和胜利中，意大利的伽利略（Galileo Galilei,1564—1642）和德国的开普勒（Johannes Kepler, 1571—1630）这两位名人起了极其重要的作用。

1610年，伽利略在天文学史上第一次将望远镜指向天空，为天文探讨开辟了不可想象的远大前景。他最初的一批观测导致一系列卓越的发现。首先他发现木星有四颗围绕它运行的卫星。这些卫星在轨道上运行的周期，最短的42小时，最长的17日。伽利略为了感谢土斯干的大公爵科西莫·麦迪西斯，将这些卫星叫做“麦迪西斯行星”。不久开普勒将它们命名为“卫星”。这个名称一直沿用到今天，用来称呼象行星环绕太阳旋转那样，环绕行星旋转的一切天体。

伽利略发现的木星的“月亮”系，复制了小型的行星的“太阳系”。这些新的卫星揭露古老的武断——只有稳固的地球才能是运动的中心——是错误的。卫星的围绕木星运行，使反对哥白尼体系的一种“理由”，即“月球不可能围绕运动着的地球运动，而不落在它后面的”，不攻自破了。

伽利略还发现金星并不总是显现完满无缺的圆面，而是象月亮一样变化它的外貌——出现盈亏圆缺甚至不见（图10），这便证明金星和月球同样是一个不发光的天体，它的光来自日光。金星的位相变化准确地发生，这是可以按金

星围绕太阳的轨道运动加以预测（图10）。

在这些发现和其它一系列发现的支持下，伽利略在大学的讲台上和一些优秀著作中，很成功地传播了哥白尼的天文学。为此，他被宗教法庭的异端裁判所传讯，而于1633年被迫公开宣布放弃其“邪说”。

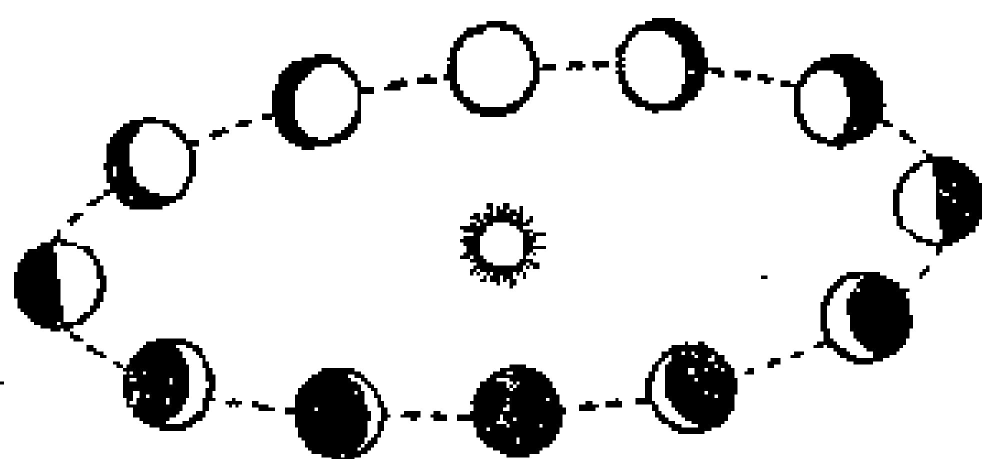


图 10 金星的位相

行星运动本身的研究第二步，为伽利略的同代人开普勒的卓越工作所完成。

约在1600年间，根据哥白尼理论编制的行星运动表，预测的位置误差达到4°至5°。这样大的误差表明，哥白尼的理论还不完善。开普勒是哥白尼体系的热情追随者，认为他的基本原理是正确的。唯一使他置疑的是哥白尼体系中保留的托勒玫体系的本轮。开普勒手里掌握有大量精密的火星观测数据，这是那个时代最精通天文观测的丹麦天文学家第谷·布拉赫（Tycho Brahe，1546～1601）所遗留下来的。开普勒就以火星为例，对行星运动的性质进行仔细的研究。

由于火星的视运动是同时由火星和地球的真运动所造成的，因此开普勒决定先精密地确定地球的轨道。为此他使用一种奇妙的方法，使他能最先认识地球轨道的真实形状。这研究所根据的原理如下：

假定在连续几个火星周期内，观测火星冲时的位置，火星总在其轨道上同一位置，而地球的位置每次都不相同（如图11，M表示火星，E_0、E_1、E_2等表示地球的位置）。

如果第一次观测时地球在E_0点，在火星轨道周期687日

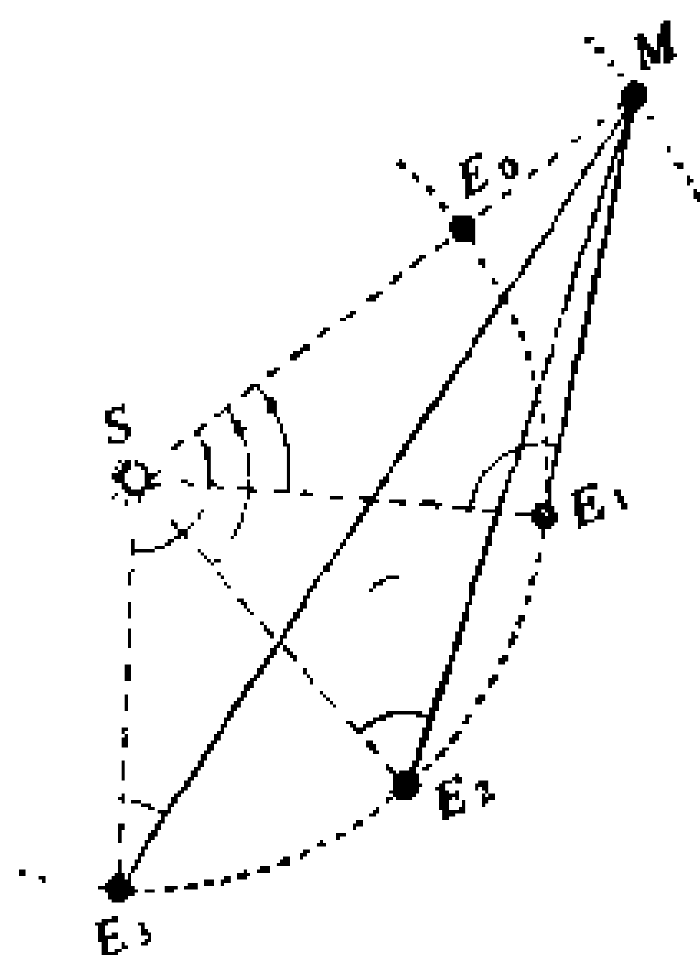


图 11　地球轨道的决定

后，地球在自己的轨道上还不能完成两周，因此它将在E_1点。再过687日，它在E_2点，如此等等。

首先，须知从地球上，利用比较各时期太阳在黄道的视位置，我们能够测定从地球所见的不同时期的太阳位置之间的角度。事实上，于某一段时期内太阳在黄道上的视角距离，正好等于日地间联线在该时期内所扫过的角度。太阳在黄道上的视运动，早为古希腊人和第谷研究过。因此开普勒掌握有一套相当精确的太阳运行表，可用以计算每天太阳在黄道上应占的位置。

这样，E_0SE_1，E_0SE_2等角是开普勒所知道的。由观测还能得到火星-太阳间的SE_1M，SE_2M等角●。由于在SME_1，SME_2，SME_3等三角形中，有一个共同的边（SM）不变，和两个夹角是已知的，因此可以按三角学求出SE_1，SE_2，SE_3等距离（用SM的分数表示出来），于是用作图法可以描出与这几个时刻地球的位置（E_0、E_1、E_2、E_3……）相对应的点。而且可以用这些点绘出表现地球围绕太阳运动轨迹的一条曲线。

● 这些角一般不是直接测定的，因为火星与太阳很少同时出现于天穹，但是可以由观测这两个天体与恒星的相对位置而得出，因而行星与恒星之间的角距离总是可以知道的。

发现这条曲线是一个圆，可是太阳却不在圆心，而在偏离圆心的不远处（图12）。圆心与太阳位置之间的距离OS，据开普勒所绘的图大约是这圆的半径的1/59（即OE的0.017）。这是一个很小的数。在半径10厘米的圆里这偏离度只有1.7毫米。

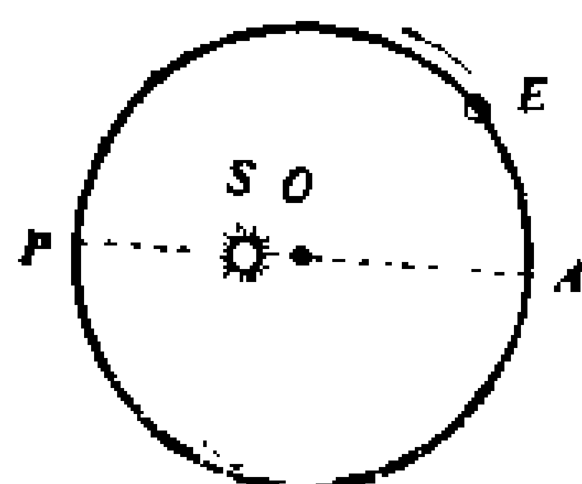


图 12 开普勒对于地球轨道的概念

开普勒还注意到，地球在轨道上的运动并不是匀速的。地球在最接近太阳的P点（**近日点**）（图12），比在最远离太阳的A点（**远日点**）运动要快。开普勒将这一特点考虑进去以后，编制一个详细的地球的轨道运行表，几乎标出一年内每天地球所在的位置。

开普勒完成这一工作之后，开始修正火星的轨道。他从第谷的观测中选出火星在一个或几个周期里的位置。

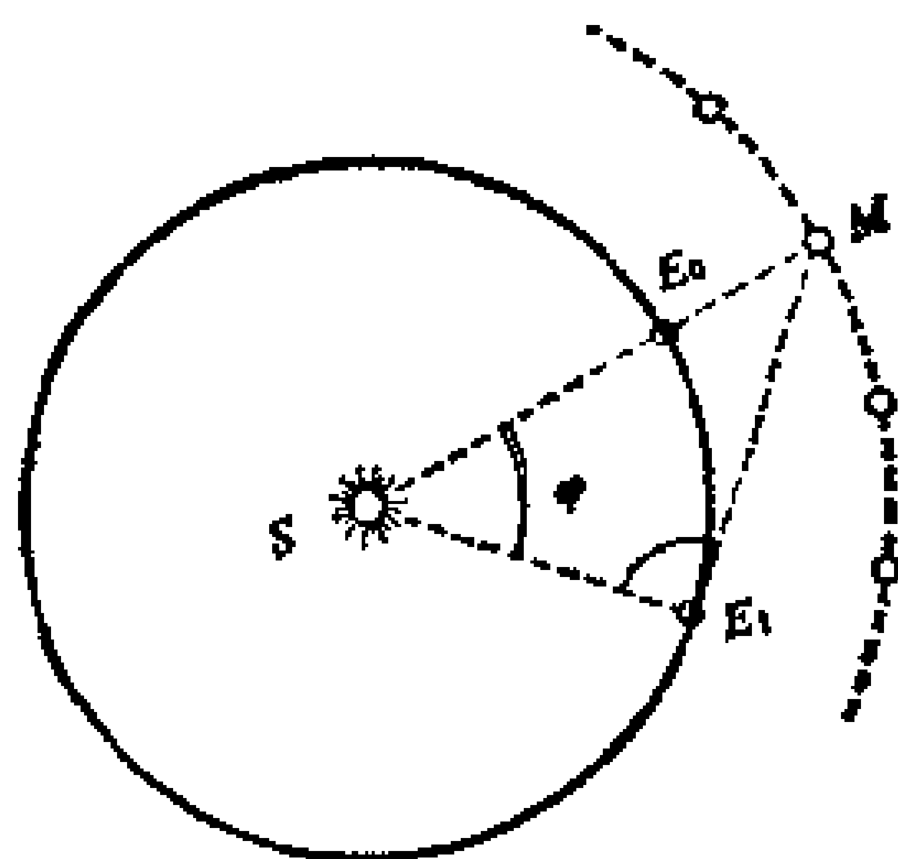


图 13 火星轨道的决定

图13表示火星冲时，地球和火星的位置（E_0、M），以及经过一个火星周期后地球的位置E_1。开普勒可以根据他所编制的地球运行表确定φ角和距离SE_1。至于SE_1M角则由观测确定。于是从SME_1三角形可以算出SM，即火星——太阳之间的距离。

于是开普勒计算了火星在其轨道中许多点上与太阳的距离，并在图上求出通过这些点的曲线。开普勒经过了长期的

艰苦工作，终于断定火星的轨道不是正圆，而且它的运动不能表为几个圆运动的合成。这样便驳倒统治了许多世纪的天体运动只能是圆运动的观点。开普勒经过多次的试验，企图通过这些点绘出一条合适的曲线，最后才发现火星的轨道可以用椭圆很好地表示出来。这是象一个被拉长的正圆的一种卵形曲线，太阳在其一个焦点上。❶

我们知道，椭圆曲线有一个特性，即它上面的任何一点到两定点（焦点）的距离之和是常数。以一平面倾斜地割截圆锥或圆柱，截口总是椭圆（图14）。

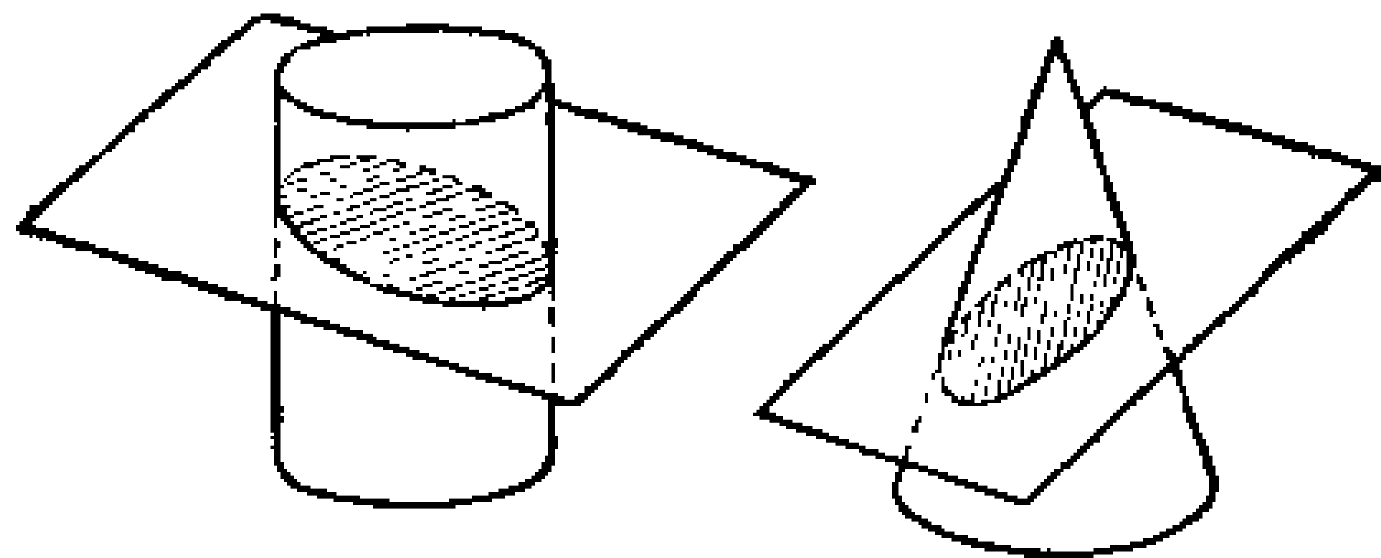


图 14 平面割截圆柱或圆锥时造成的椭圆

图15内F_1与F_2表椭圆的两个焦点，O是椭圆的中心，AD是长轴，BE是短轴。AO＝OD，BO＝OE分别叫做半长轴与半短轴。AD叫做拱线。比值 $e=\frac{OF_1}{OA}=\frac{OF_2}{OA}$；$r_1$和$r_2$之和是常数，等于椭圆的长轴AD。e叫做椭圆的偏心率。偏心率越大时，焦点距离中心越远，半长轴与半短轴之差也越大。椭圆中心与焦点之间的距离可以由以下的方程式算出：

---

❶ 这是开普勒的发现的一个简化的说法，事实上他的实际推理过程要复杂得多。

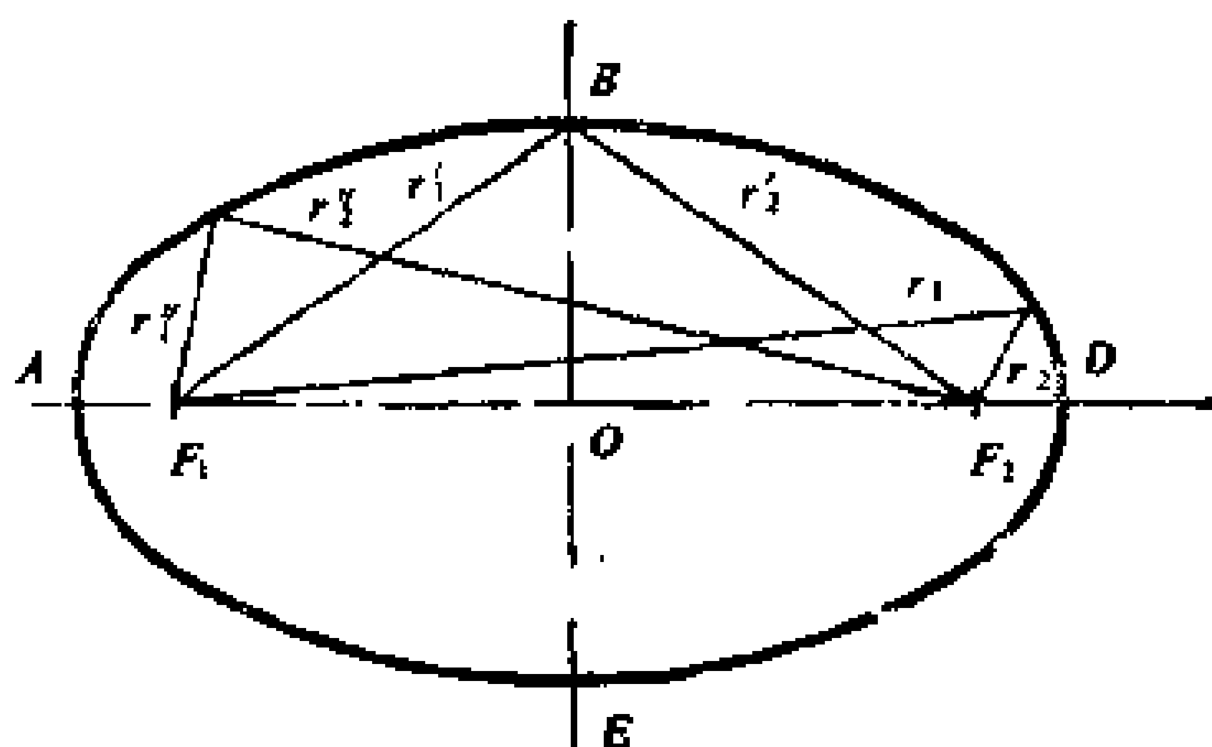


图 15 椭圆 $r_1+r_2=r'_1+r'_2=r_1''+r_2''$

$$OF_1=OF_2=e\times OA$$

半短轴BO与半长轴AO和偏心率e的关系由以下方程式所规定

$$BO=AO\sqrt{1-e^2}$$

BO与AO之差愈大，椭圆愈长，因而和正圆的差异愈大。偏心率小时，短轴与长轴差不多相等，椭圆和正圆的差异很少。

由联系AO，BO和e的方程式，可以看出：设偏心率为0.1，而AO＝10厘米，即焦点距离中心只有1厘米，则半长轴与半短轴之差只有0.05厘米。

开普勒计算出火星椭圆轨道的偏心率约为1/11。它的轨道半长轴为近似正圆的地球轨道的半径的1.52倍。图16表示这种偏心率的椭圆轨道。由图可见，它和正圆的差别很难看出，但是太阳偏离中心的情况则显而易见。

由观测表明，火星好象在黄道两侧摆动。这现象以前被解释为行星在本轮上的附加运动。哥白尼也仍然坚持这个信念。开普勒分析第谷的观测，发现火星对黄道的一切偏离都

可以由一个事实去解释，即火星总在一个平面内运动，而这平面是与地球的轨道面斜交的。这个角叫做行星的轨道**交角**。对于火星，这个角大约是2°。

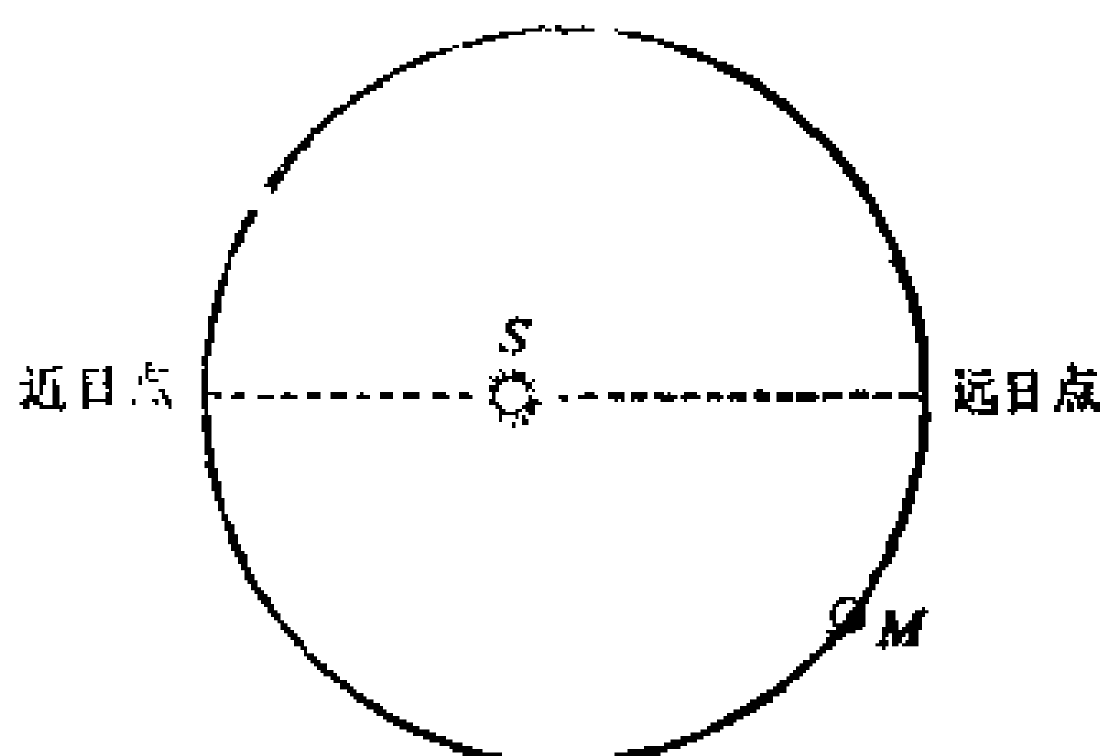


图 16 开普勒算出的火星轨道

总之，开普勒确定了这个事实：火星在椭圆轨道上运行，它的轨道面与地球的轨道面相交成大约2°角，太阳处在这轨道的焦点上。

这是开普勒所发现的火星运动一系列显著的规律中的第一个。

然后开普勒作行星轨道运动特性的研究。他发现，火星在近日点附近，从太阳看，每两个月约行37°.0。而在远日点附近，在同样长的期间内火星只扫过25°.8一段弧。可见，火星距离太阳愈远，它在轨道上运行愈慢；在近日点附近速率最大，远日点附近速率最小。开普勒试过很多假设，终于得到一个显著的规律（图17）：火星在其轨道上运行的方式是这样的，如果在这轨道上，取火星于相同的一

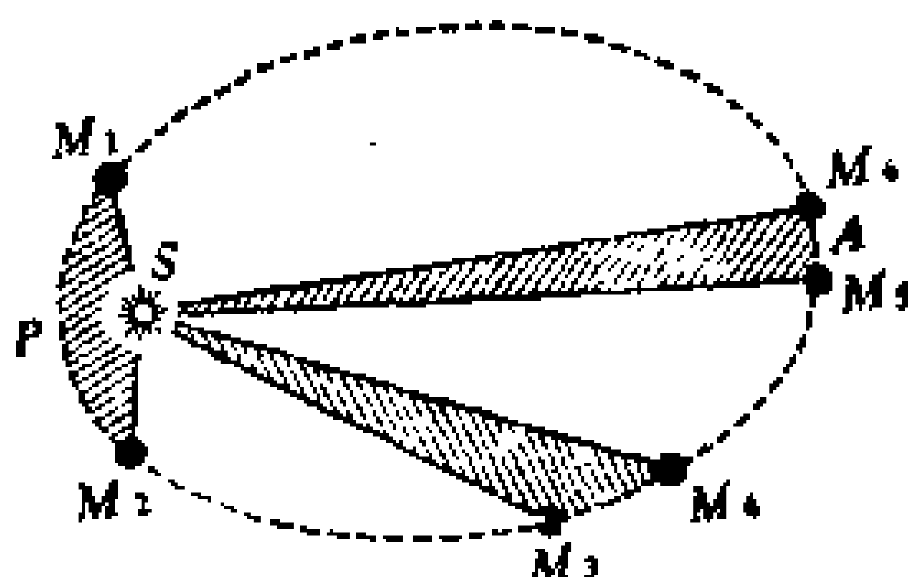


图 17 面积定律：设行星在相等时间内扫过M_1M_2，M_3M_4，M_5M_6等，阴影表示的扇形面积都是相等的。

段时间内在其轨道上不同部分扫过的几段弧M_1M_2，M_3M_4，M_5M_6等，并将这些弧的两端与太阳联接直线，那么SM_1M_2，SM_3M_4和SM_5M_6等扇形的面积都是相等的。● 这个规律可以换为另外一个说法：太阳中心与行星中心的联线，即行星的**向径**扫过的面积与时间成正比例。

这是火星运动的第二个显著规律～**面积定律**。因此，已经发现关于火星的两个重要定律，现在通称开普勒第一和第二定律。

1.行星在椭圆上运动，太阳在这椭圆的一个焦点上。

2.在相等的时间间隔内，行星与太阳的联线（向径）扫过的面积相等。

虽然开普勒只对于火星建立了这两个定律，但是他相信它们对于一切行星都有效。因为他能直接证实这些定律对地球是正确的。实际上，按开普勒的数据，地球在近似的圆周上运行，其椭圆轨道的偏心率只是1/59＝0.017。由于偏心率这样小，因此半长轴与半短轴之差只有半长轴的1/7000。当然，在开普勒的时代还是不能将这样一种椭圆与正圆区分开来的。● 但是不管怎样，他所掌握的地球运动数据，是与第一定律没有矛盾。至于第二定律，开普勒的地球运行表揭示，它最接近太阳时运动快，远离太阳时运动慢，正好和第二定律所推出的结果符合。

以后，开普勒还测定了其它行星的近似椭圆的轨道。

开普勒的第一、第二两定律是天文学上最重要的发现。但是开普勒还希望再找到一个对于太阳系一切行星都适用的

● 为了使概念清楚，图17描绘的椭圆比火星的轨道椭长得多。M_1M_2，M_3M_4等弧长与实际相差很大。

● 我们应该记住开普勒的时代里一切天文观测（包括开普勒所用的第谷的观测）都是肉眼的观测。

普遍定律，以表达“行星距离太阳愈远，运动愈缓”这个显然的事实。这个值得注意的比例关系，只是于1618年才为开普勒发现，这便是开普勒的**第三定律**。通过将行星轨道的大小和它们围绕太阳运行的轨道周期联系起来，开普勒发现，任何两个行星围绕太阳运行的公转周期的平方之比，和它们椭圆轨道的半长轴（或对于太阳的平均距离）的立方之比是相等的。

例如，地球和太阳的平均距离与火星的平均距离之比为1∶1.52(据开普勒的数据)，而它们围绕太阳运行的公转周期之比为1∶1.88。如果取第一个比值的立方和第二个比值的平方，那么便分别求得两个几乎相等的比值:1/3.53与1/3.54。

地球和木星与太阳的平均距离的立方之比是1/125(那时认为木星距离太阳大约是日-地间的距离的5倍)；而它们的公转周期的平方之比是1/144(木星的周期大约是12年)。这两个比值自然只是大致相等，因为那时木星与太阳的距离和它的公转周期都知道得相当不准确。但是开普勒认为他的定律是绝对地正确的。

如果将地-日距离和地球的轨道周期取为一个单位，并使用现今的行星的距离和轨道周期的数值，那便得到下表：

表 1

行　星	半长轴a	轨道周期T	a^3	T^2
水　星	0.387	0.241	0.058	0.058
金　星	0.723	0.615	0.378	0.378
地　球	1.000	1.000	1.000	1.000
火　星	1.524	1.881	3.540	3.538
木　星	5.203	11.862	140.8	140.7
土　星	9.539	29.458	868.0	867.9

由表1可见，任何两个行星与太阳的平均距离的立方之比 $(a_1/a_2)^3$，差不多和它们周期的平方之比 $(T_1/T_2)^2$ 是正好相等的。至于表1列出的数字与第三定律有细微偏离的原因，以后将要加以说明。

在他发现的三定律的基础上，经过多年的精密计算以后，开普勒编制了行星表，记载任何时刻每个行星在天空的位置。这些表刊布于1627年，证明它们比以前用过的一切天文表优越得多。这是开普勒定律的正确性的明证，并奠定开普勒在天文学史上作为"天律的制订者"的地位。

我们必须再次强调这样一个事实：开普勒相信他的定律既适用于所有的行星的运动，又适用于月球和当时已知的四个木卫的运动。开普勒在诸木卫与木星的距离和它们的轨道周期关联间发现他的第三定律仍是有效。他把他的头两个定律应用于月球的运动；但是证明月球运动由于大量不规则性而复杂化，而这些不规则性是开普勒解释不了的。

开普勒的成就，结束了行星运动研究的第一个时期，它可以叫做**描绘的或几何学的时期**。人们才知道行星**怎样**运动，并编制出详尽的而且相当精确的行星运行表；可是还不了解行星**为什么**按照开普勒定律运动。究竟是什么因素使行星围绕太阳，木卫围绕木星，月球围绕地球运动呢？

行星运动成因的理论——太阳系动力学——发展的起源，是与哥白尼、开普勒和伽利略他们这几个同样光辉的姓名紧密地联系在一起的。

3、引力定律的发现

今天大家都知道，一切物体都会由于引力向地面坠落。一切物体没有什么东西支持它们必将向地面坠落。什么原因使它们坠落呢？古希腊人“解释”为：一切有重量的东西必然“向下”趋赴宇宙的中心；在古代这中心被认为是地心。因此他们把这性质叫做引力。

只要把地球看做是世上特殊的孤立的存在，重量（或重力）便被认为是纯粹地球上的现象，而与天上的物体无关。但是哥白尼和他的信徒们的发现证明，地球是一个普通行星，和其它行星一起，围绕太阳运动，并且地球是一个很象其它天体的星球。由此看来，引力的性质不仅地球有，其它天体同样也有。如果地球附近的物体趋向地心，那么月球、行星或太阳附近的物体也各趋向于这些天体的中心。换句话说，物体被这些天体所吸引。

哥白尼和他以后的开普勒就这样地假设：天体具有吸引的性质，❶ 他们认为这性质是同类物体具有相互结合的趋势。开普勒在他的《新天文学》里写过这样一段话：

“引力是同类的物体力图互相靠拢和结合的倾向……不管地球在哪里，由于这种特性，重物常趋向于彼此接近……。设将两块石头放在世界任何处，如果它们互相接近，而在第三物体的力场之外，那么这两块石头就象两块磁体似地靠拢

❶ 对于重力的相似看法，曾为较早的库萨的尼古拉（Cusa Nicholas，1401～1464）与达·芬奇（Da Vinci，1452～1519）提出过。

在一起，……”

由于将重力推广到另外天体，问题便成为物体的**相互作用**了。

另一方面，哥白尼发现的太阳系结构的特性表明：在行星系中央的太阳对于它们的运动起了明确的作用。在太阳和行星都具有吸引作用的假设下，哥白尼已认识到太阳对于行星的影响。太阳对于行星所起的作用，在开普勒定律中表现得更加明显：太阳处在一切行星椭圆轨道的一个焦点上（第一定律）；行星接近太阳时运动快，远离太阳时运动慢（第二定律）；一切行星的轨道周期和它们对于太阳的平均距离有一个简单的关系（第三定律）。

开普勒相信行星的运动受太阳的支配。他对引力提出相当正确的看法，说：“两个分离的物体象两块磁体那样，力图互相接近。”他认为引力对于行星的运动有很大的重要性。引力使太阳抓住行星。可是开普勒下面的这个看法却是不很正确的。他相信太阳象磁体那样吸引行星，而且太阳的自转带动了行星的公转。

有关行星的引力与运动之间的关系下一步的发展，和力学的发现有密切的联系。

这些发现是伽利略对于科学的贡献。他推翻了流行两千多年的关于物体运动的谬误观点，从而奠定了至今仍然使用的力学的基础。

伽利略以前占统治地位的观念是：须将力不断地施加在物体上，它们才能不断地运动，没有力它们便保持静止。这个见解与日常所见的事实看起来是如此相合，以致经历很久没有人怀疑它。只有伽利略的智慧才发现它是荒谬的。

伽利略让一个抛光的光滑的金属球在一个光滑的斜面上

滚下来，做了许多实验。如果将这个球推一下，使它沿斜面向上运动，那么它的运动逐渐变慢，终于停止前进，以后又开始加速地向下滑动。伽利略发现，如果这斜面的倾角较小，这球在沿斜面上升的减速和下滑动的加速都变小。

那么，如果将这板水平放置，会出现什么情况呢？显然，这个球既不会受到减速，也不会受到加速，而应以匀速滚动无限长的时间。用伽利略自己的话讲："当物体在水平面上运动不受到任何阻力的时候，如果这平面伸向无限的空间，那么它的运动岂不是匀速地无止境继续进行吗？"

自然，在水平板面上做这样一个实验，实际上是办不到的，因为板面上的摩擦力终究会使这个球停止下来。这正好是伽利略的天才表现之处，因为他能够从摩擦力之外看到物体因受各种作用而加速或减速。如果物体不受任何力的作用，那么它将以不变的速率（匀速）在一直线上运动。物体的这种性质叫做惯性。

伽利略的这一发现使得在行星运动的原因的解释上，能出现一种完全不同的理解。开普勒还认为需要有一种"推"力才能说明行星的运动。可是现在就不需要这种力了，因为行星只借惯性运动，并不需要什么力去不断地推动它们。施加在行星上的力，并不是用来解释行星运动这个事实，而是用来说明它们运动的特性。就是由于这个思路，才有可能正确地确定了引力与行星运动之间的关系。

1666年意大利学者波雷里（Borilli）关于引力的作用说了下面的话："让我们设想，行星趋向太阳，同时在其圆周运动中又要离开圆心附近的中心天体（即离心力）。如果这两个方向相反之力相等，那么它们就平衡，而行星便继续围绕太阳转动。"

英国科学家罗伯特·胡克（Robert Hooke）更进了一步，他于1674年所写一篇论文《根据观测验证地球运动的一种尝试》里曾说："将来某一天我要说明一种世界体系，它的许多特性与任何已知的体系不同，而且能够回答机械运动的普遍规则的一切问题。它建立在三个假设之上：1）一切天体都有一种趋向它们中心的引力……；2）一切物体在一种笔直而简单的运动中将不断地在直线上向前运动，除非受了某些其它作用力的偏折，而使它转变方向，在正圆、椭圆或其它更复杂的曲线上运动；3）物体愈接近对它施作用的引力中心，它所受到的引力作用愈强。"

波雷里与胡克的思想虽然距离真理不远，但仅是一些猜测。可是人们所需要的是严谨的证明，就是行星的运动服从于引力，而且引力的存在的确能说明由观测得来的这些运动规律。这便是英国大科学家伊萨克·牛顿（1642-1727）所完成的工作。

早在1665～1666年间（差不多与波雷里和胡克同时），牛顿已经从事探讨引力与行星运动的关系；到了1680年他已经有了他自己的完整的理论。1687年牛顿将他的研究结果发表于他的名著《自然哲学的数学原理》之内。

在这部卓越的著作里，牛顿总结了前人对于地上与天上的运动的一切发现，系统地归纳成他那驰名的三个运动定律，从而形成了力学的基础，成为技术科学的理论基础之一。

牛顿第一定律（惯性定律）指出：如果没有施外力于物体，迫使它改变运动状态，物体将保持静止或作匀速直线运动。

牛顿第二定律说明物体的加速度与外力的关系。据这定律，物体所获得的加速度a与作用力F成正比例，并与物体

的质量m成反比例。

$$a = \frac{F}{m}$$

这定律里牛顿首先介入的**质量**的概念。牛顿将物体所含的物质的量叫做质量。

牛顿第三定律说：每个作用必有一个相等而反向的反作用。

这三个定律为地上条件的实践所充分支持，并作为研究地上物体运动的基础。牛顿不怀疑将它们应用于天体运动上，他认为天体毫无疑义与地上的物体一样，服从相同的定律。



图 18 在太阳的引力下行星怎样偏离直线路径

图18表示围绕太阳 S 运动的行星 P 的轨迹的一小部分。P_0 表示某瞬间行星的位置。如果没有力施在它上面，据惯性定律，它应当以 P_0 点的速率作匀速直线运动（行星运动的方向以箭头表示）。这运动路线应当在这一点上与曲线相切。但是行星是沿曲线运动的，它必然受到某一个力的作用；这力迫使它偏离直线路径。行星的轨道常以凹面对着太阳，就是说有一个使行星偏离直线方向、永远指向太阳的力。

牛顿证明：如果物体围绕某个中心的运动满足面积定律，那么使这物体偏离直线的力不只是大略地在中心的方向上，而总是精确地指向中心。[1]

因为行星围绕太阳的运动是满足面积定律的，所以行星便因受太阳的引力作用而围绕它运动。这样，先前提出的一

---

[1] 牛顿的这个和以后其它几个定理的严格而详细的证明均见附录。

种猜想，现在成为经过严格证明的事实。于是牛顿在物体围绕力的中心运动所描绘的曲线的几何特性基础上，进一步推导出能决定引力随该物体与中心的距离而变化的定律。

他将结论建立在这样一个事实上：物体运行的曲线对于直线的偏离（即曲率）愈大时，中心的引力愈强。牛顿的计算表明，如果物体描绘的曲线是椭圆，而吸引中心在它的一个焦点上，那么这个中心的引力将按该物体与中心之距离的平方而减少。

据开普勒第一定律，我们知道每个行星都在椭圆上运动，太阳在它的一个焦点上，因此施于行星上的引力是与行星-太阳之间的距离的平方成反比例。由此可见，从开普勒的行星几何学出发，牛顿能证明，行星因受太阳的引力而运动，而且这引力是随行星-太阳间的距离的平方的反比而变化的。

现在已经解释了行星围绕太阳的运动。但是牛顿推断，引力也应当支配卫星绕它们的行星的运动。正如牛顿所知，卫星也应当为原行星所吸引，而且这引力也是按卫星与原行星两体中心间的距离的平方成反比例而变化的。

牛顿出生前，伽利略已经发现了四颗木卫，在1655～1684年间惠更斯（Huygens）和卡西尼（Cassini）发现五颗木卫。由木卫的观测发现，它们在围绕以木星为中心的轨道上作匀速圆周运动；这些卫星的运动恰好满足开普勒第三定律（即卫星的轨道周期的平方按它们与木星的距离的立方而变化），而且这比例对土卫也有效。❶

---

❶ 现在知道木卫和土卫的轨道都不是正圆，而是偏心率很小的椭圆，因为那时观测的精度还不能探测出它们的轨道的偏心率，但是这并不妨碍它们的运动是遵循开普勒第三定律的。

在匀速圆运动的范围内，显然满足面积定律；根据牛顿的定理可知，使木星的卫星和土星的卫星不断偏离直线路径，而在正圆轨道上运动的力，便是指向原行星的中心的。牛顿证明另外一个简单的定理：围绕一个力心在正圆上运动而且满足开普勒第三定律的物体，是被一个中心所吸引，而且这引力是随距离的平方反比而变化。

于是牛顿严格地证明了，太阳系里一切天体的运动都是重力作用的结果。

不仅如此，牛顿还给予他所发现的引力定律以一个间接的证明。让我们随着这位发现者进行推理。设想一个物体在按距离平方反比律的中心力的作用下运动。从这物体的运动里，我们应观测到哪些规律性呢？

牛顿证明了这样一个定理：如果物体由于中心力的吸引而运动，那么这运动应当满足面积定律。如果这引力随与中心的距离的平方而减少，那么这物体将在椭圆（特殊的例子是正圆）、抛物线或双曲线这三种曲线之一上运动。现在如果几个物体在围绕吸引中心的几个不同的椭圆上运动，那么就给出反比于它们与中心的距离的平方的向心的引力而公转周期的平方将随它们的轨道的半长轴的立方而变化。

概括地讲，如果行星因受引力而运动，那么开普勒三定律必然适用。而且因为这些定律是从观测导出的，所以牛顿的推理便作为引力存在的间接证据。

可是牛顿不但能够证明，根据开普勒定律，行星-太阳间引力是存在的；而且还成功地将似乎只在天体间起作用的引力与大家熟知的使物体坠落地面的重力联系起来。牛顿研究了月球的运动，并证明它借以被地球吸引而且支配着它的运动的力不是别的，就是地球的重力；此重力延伸到月球，而

按月-地间的距离的平方而减弱。

伽利略已经做过实验，求得重物以大约9.8米/秒^{2}的匀加速度坠落地面。而且在地面任何方向上（向上、向下，或与水平面成一个角度）运动的物体，都有垂直向下的等量加速度。因此据牛顿第二定律，地上一切物体都受到一种垂直向下（即指向地心）的力，换言之即一切物体都被吸引向地球的中心。而这便是决定一切物体的重量的力，即重力。物体在地面与在高山上都有重量。距离地面更远处有什么力阻碍这种地心引力作用呢？牛顿自然猜想，它至少远到月球。牛顿推断，这种力将按同样的平方反比定律而减弱；这定律对于太阳、木星和土星的情形是明显的。牛顿能根据计算证明他的猜想，因为月-地间的距离和地球的半径那时都已经知道了。

在地面，即距离地心6,370公里处，加速率大约是9.8米/秒^2。在距离地心r（约384,000公里）的月球上，地心引力所造成的加速率应当减弱到地面的$\left(\frac{384000}{6370}\right)^2 \doteq 3640$分之一。以3640除9.8米/秒^{2}便得0.270厘米/秒^2。如果月球的加速度是地球引力所形成的，那么这数字应当是月球的加速度。现在试近似地计算月球的实际加速度（假设它在正圆轨道上运动）。匀速圆运动的向心加速度等于$a=\frac{v^2}{r}$，在这公式内v是月球的轨道速度，而r是月-地间的距离。月球的轨道速度v等于$2\pi r/T$，T是月球的轨道周期，等于27.33日。由这方程式解得：

$$v \doteq 1.02\text{公里/秒}。$$

将v平方而以r除它，求得：

$$\omega \doteq 0.271\text{厘米/秒}^2$$

由此可见月球的实际加速度差不多和地心引力在月球上造成的加速度符合。如果考虑到月球轨道不是正圆而是椭圆，那么这两个数字（0.270与0.271）可算符合得很好。

因此地面物体的重量和月球的运动都是由于相同的力所致。地球用以将一切物体吸引向它的中心的力，是与物体对于地球中心的距离的平方成反比例的。这样，地面物体的重量便是地球吸引物体的力。

牛顿以下述的推理来确立他的论点。试设想地球象土星或木星那样环绕有几个卫星（月亮）。把它们维持在轨道上的力，与它们和地心间的距离的平方成反比。现在如果最近的卫星近到几乎与地上最高的山顶接触，那么将它维持在轨道上的引力，便是地球施在月球上的引力的3640倍。于是这个卫星上的加速度便大约是：$0.270\times3640\text{米/秒}^2\doteq9.8\text{米/秒}^2$。

与一切物体相似，这个卫星将具有相应于指向地心的加速度9.8米/秒^2。如果重力不是将卫星维持在它的轨道上的力，它的加速度将是两个加速度之和，一个由于重力所致的加速度，另一个由于支配卫星运动力所致的加速度，换言之

$$9.8+9.8=19.6\text{米/秒}^2。$$

但是因为地面上任何地方落体所受的加速度不是19.6米/秒^2，而是9.8米/秒^2，所以维持月球在轨道上运动的力与地面上叫做重量的力是相同的。

由以上的讨论，得出的结论便是：行星围绕太阳、木卫围绕木星、土卫围绕土星、月球围绕地球运动，都是性质相同的一种现象。所有卫星和行星围绕中心天体的运动，都是由于受到了指向该中心天体的力。这个力随着它们离开木星、土星、太阳或地球的距离平方而减弱。因此这些天体具

有吸引其它天体的特性。在地球上，这种吸引力抓住了所有物体，产生通常所称的重量。因此，在太阳上，在木星、土星、火星、金星和水星上的物体，自然应该具有相同的性质——重量。

据牛顿第三定律，引力具有相互的性质。因此，如果太阳把行星拉向它自己，那么每个行星也把太阳拉向它自己。如果地球吸引月球，那么月球也应当吸引地球。最后，如果一切物体被吸引向地球，那么它们也应当把地球吸引向它们自己。这说明，引力的性质是内在的，不但属于每个天体，而且属于一切有质量的物体，属于一切构成物体的有质量的粒子（质点）。

引力的大小随什么而定呢？我们已经知道，这种力随两个物体之间的距离而减弱。还有什么因素改变引力的大小呢？

牛顿很简单地证明：引力是物体的质量的函数：质量愈大的物体施于其它物体上的引力愈强。

地球上的实验表明，地球用来吸引一切物体的力，给予它们以相同的加速度（9.8米/秒^2）。牛顿第二定律说：加速度 $a=F/m$。如果一切落体的加速度是常数，那么施在物体上之力应当与它的质量成正比例，即随质量的增减而增减。

我们也可以这样讨论：物体受到地球的引力决定了它们的重量，而重量与它们所含的物质的量成正比例。因此引力与物体的质量成正比例。

这样，引力与吸引体的质量成正比例。例如，设有A、B、C三个物体，其质量分别为m_A，m_B，m_C。A吸引B和C的力和它们的质量成正比例：

$$\frac{F_{AB}}{F_{AC}}=\frac{m_B}{m_C}$$

但是牛顿第三定律说：一个物体被另一个物体所吸引，它自己也应当吸引后一物体。因此B与C两体吸引A体之力应当等于F_{AB}与F_{AC}，而且与这两体的质量成正比例。于是引力与施引力之物体的质量成正比例。

牛顿便根据这样的推理，而发现他有名的**万有引力定律**：

每个质点吸引每个其它质点之力与两质点的质量的乘积成正比例，而与它们之间的距离的平方成反比例。以m_1与m_2表示两质点的质量，以r表示它们之间的距离，则引力F可表示为：

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

式内f叫做**引力常数**，对于一切质点是相同的。现在，引力常数已经以足够精度测定，如果取太阳的质量为质量的单位，日－地间的平均距离为距离的单位，那么$f = 0.000295912$。

以c、g、s（厘米、克、秒）单位表达，$f = 6.67 \times 10^{-8}$，精度达0.01×10^{-8}。可能误差是0.005×10^{-8}。

4、不同形状物体的引力

平方反比律，是牛顿对质点求得的。但是天体——太阳、月球、行星不是质点。人们自然会问：能够将牛顿的定律用以研究这些天体的运动吗？有什么定律表达物体的引力随距离变化呢？

试讨论两个与彼此的距离"比较线度"很小的物体A与B。我们可以假想将这两个物体分割为很多小部分，我们将把这

些部分称为“质点”。这两体的质点按牛顿定律互相吸引，A与B总引力为一切个别质点的相互引力所组成。但是A的一切质点与B的一切质点实际上差不多相距一样远。因此，A与B两体中的质点的合引力是与两体距离的平方成反比例的。这样对于长度上彼此距离相比是很小的情形下的两个物体，牛顿定律仍然有效。在力学上，这些物体叫做质点。

质点有时被看做是小尺度的物体。但是在某些问题中，即使是太阳和行星也可以看做质点。让我们先讨论行星围绕太阳运动的问题。这里，行星对于太阳的距离与它们的大小比较，是很大的；日-地距离大约是太阳直径的100倍，地球直径的10,000倍。这意味着，将太阳和行星看做是质点彼此吸引，是不会有大的错误的。

可是吸引体之间的距离不一定都是很大的。举地球对于地面附近的小物体的吸引为例。在这种情况下，地球与这物体间的距离的真正概念便不清楚了，这距离究竟是该物体相对于地面、地心而言，还是对其它地点而言呢？如果设想将地球分为无数质量相等的小质点，这些质点以不同的力吸引我们所说的物体。

如果地球的每个质点都按平方反比定律把物体拉向自己，那么将用什么定律来描述地球的总引力呢？将地面的重力和地球吸引月球之力比较时，我们认为地球吸引物体不论远近，引力总是按它们对于地心的距离的平方成反比例的。这里是否有些矛盾呢？

这问题是牛顿首先提出而且解决了的。他证明一个定理：质点组成的一个均匀的球，就象集中着球的全部的质量，位于球心的一个质点一样，按距离平方反比律吸引其它一些物体，而且被它们吸引（证明见附录）。这个卓越的定理

不仅对均匀的球、而且对于密度随与球心距离而变化的球也有效。

这个定理适用于太阳、地球及其它行星，因为它们的形状都几乎是圆球。太阳与行星所以象质点那样互相吸引，理由有二：

1）它们之间的距离和与它们的线度比较是很大的；

2）它们的形状都近似圆球。

自然，物体的形状不都是球形的，吸引体之间的距离与它们的大小比较不一定都是很大的。对于这些物体，引力随距离变化的定律变得比较复杂。

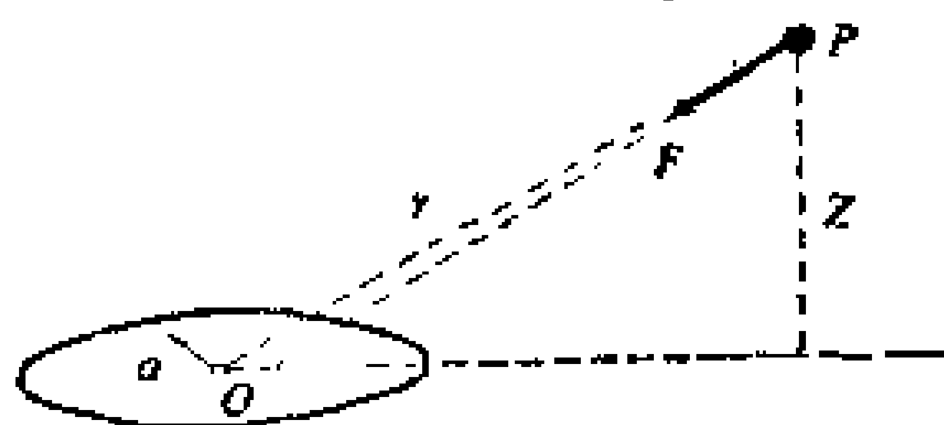


图 19 环形物体吸引P点的力不过环心O

例如，试讨论一质点P被一环形物体所吸引，这物体的质量为M，半径为a，厚度与半径比较是很小的。设P与环心O的距离为r，高出环面的距离为z。最接近P点的环形物体的质点对它的吸引力比远的部分大，因而环形物的引力的方向F将不经过环心；而移向接近P点的半环。为了求F的大小，我们将环形物分为细小的“单元”质点，这些质点每一个都按牛顿定律吸引P点。将这些基本单元的引力加和起来，便得整个环形物的引力。

由计算表明，比较远处的环形物对于单位质量的质点P的引力可以大致表为下式：

$$F = fM\left(\frac{1}{r^2} + \frac{3}{4}\frac{a^2}{r^4} - \frac{9}{4}\frac{a^2z^2}{r^6}\right)$$

就是按质点的距离r与高度z的复杂函数而变化。

由这方程式可见，环形物的引力与质量相同、中心在O的正球的引力之差是：

$$fM\left(\frac{3}{4}\times\frac{a^2}{r^4}-\frac{9}{4}\ \frac{a^2z^2}{r^6}\right)$$

特别有趣的例子是**回转椭球**的引力定律。这种椭球是将椭圆围绕其短轴旋转而形成的。图20表示这椭球的形状，图中OL＜OE，过LQ轴的平面切割这椭球，截口是一个椭圆，其两半轴为OL与OE、用与LQ正交的平面割这椭球，截口是正圆。轴LQ叫做椭球的**旋转轴**，截口EK叫做**赤道截面**，其半径OE叫做**赤道半径**，距离OL叫做**极半径**。$\frac{OE-OL}{OE}$这个量叫做**扁率**。扁率小的回转椭球（即与圆球区别不大的椭球）一般叫做**类球体**。

与匀质球比较，半径为OL的类球体多出的质量主要汇聚在赤道上（图21）。赤道上的这些超余质量的引力应当类似环形物（图19）的引力。所以质量相同的圆球与类球体的引力之差，应当大约与圆球和环形体的情形相同。这引力并不正好随与离类球体的中心的距离的平方成正比例而变化。它不

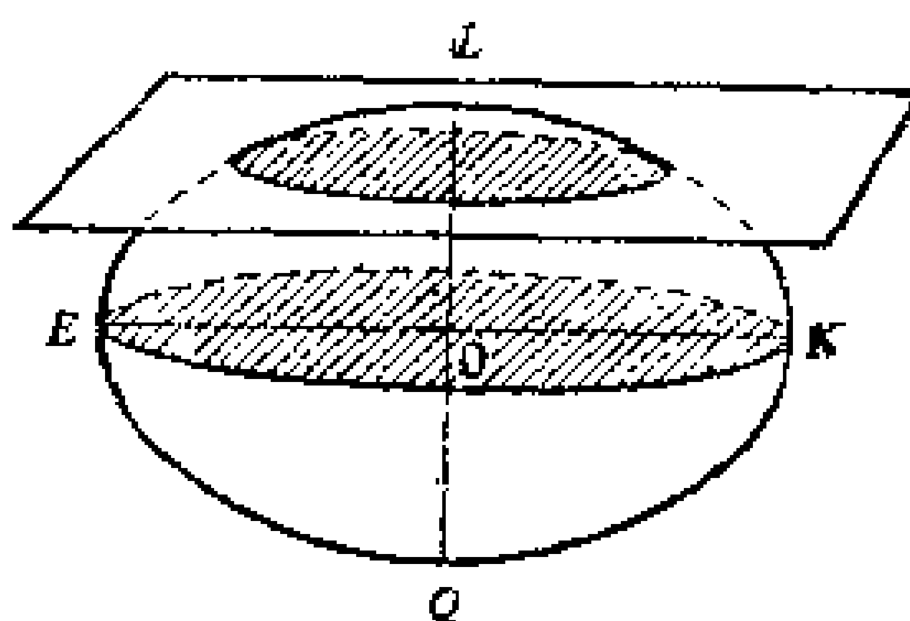


图 20　回转椭球

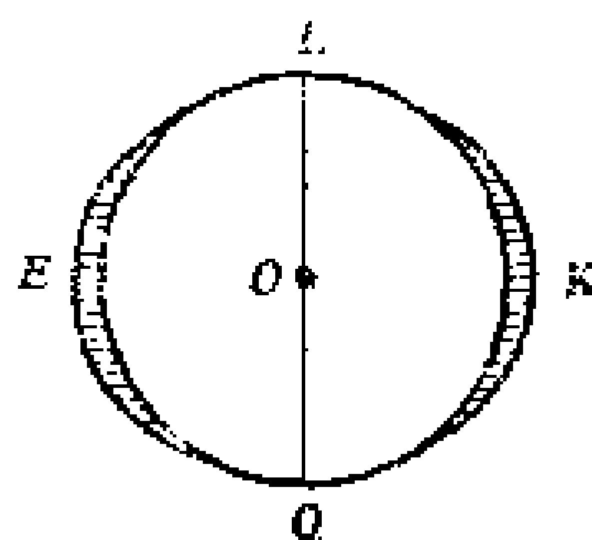


图 21　类球体上的超余质量在其赤道面内

恰好经过这中心，而偏移到类球体的赤道面最接近引力点的那一半。因为类球体关于旋转轴对称，引力将通过这个轴。

我们可以求出质量均匀分布的类球体的引力的表达式。设质量$m_1=1$的一质点距类球体较远，换言之即这质点与类球体的中心的距离 r 比类球体的赤道半径 a 长得多，便大致有：

$$F=fM\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{3}{5}\ \frac{a^2}{r^4}-\frac{9}{5}\ \frac{a^2z^2}{r^6}\right)\varepsilon\right]$$

式内ε表示类球体的扁率，M表示它的质量，a为赤道半径，z是质点在类球体赤道面上的距离。

于是类球体的引力与圆球的引力之差为：

$$F'=fM\left(\frac{3}{5}\ \frac{a^2}{r^4}-\frac{9}{5}\ \frac{a^2z^2}{r^6}\right)\varepsilon$$

这表达式与环状体和正球的引力之差的表达式很相似。

类球体吸引（与被吸引）之力不经过它的中心这个事实，可以得出下面的重要结论：

一质点P所施于类球体上之力F，不但给予类球体以平动（由类球体中心O的运动决定），而且使类球体围绕它的旋转轴LQ转动。

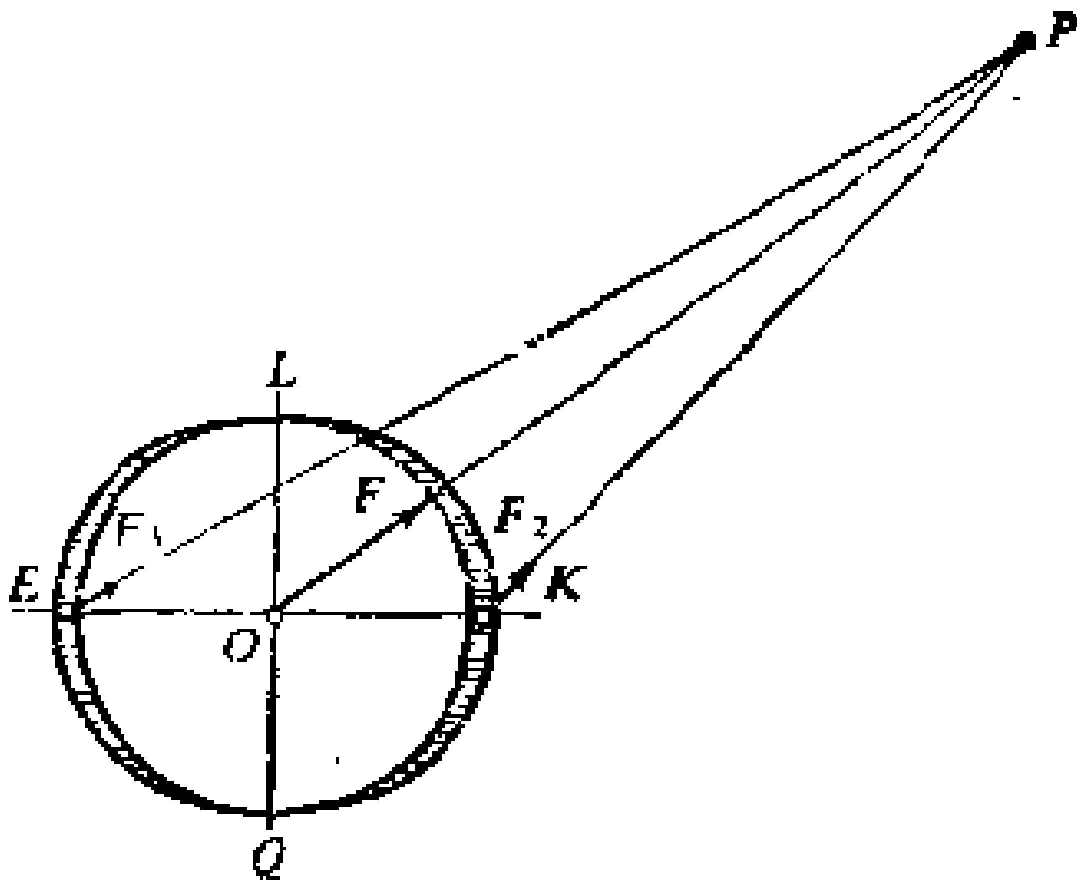


图 22 类球体的引力

这明显地表现在图22内。质点P吸引类球体的中心

和它的赤道隆起部分。因为PK＜PE，所以类球体较近部分的引力比较远部分的引力大。质点P不但吸引类球体，使它作平动，且使赤道面EK在质点的方向OP上旋转。

由环状体与类球体的引力的表达式便可以看出，质点远离时，即 a/r 的比值变小时，这两体的引力之差将减少，而且圆球的引力也减少；如果r比a大得多，那么环状体或类球体所施之力基本上将与圆球的引力一致。正如我们已经看到，这适用于任何形状的物体。在很远的距离处，它们都将象圆球那样吸引（和被吸引），或者更确切地说，象位于这些物体的重心处的同质量的质点那样吸引。

由于地球与其它行星都是稍扁的类球体，因此以上对椭球体的引力的仔细研究是必需的。例如，地球的极半径比赤道半径只短大约21公里，对于木星这差数是9500公里。因此，地球的扁率约为1/297●；木星约1/16；太阳系里有最大扁率的是土星，差不多是1/11。

可是行星的扁率对于太阳的引力的效应却是很小的。据计算，太阳对地球的引力和太阳对与地球质量相同的圆球的引力之差，还不及一千五百亿分之一。因此，研究行星围绕太阳运动之时，可以完全不考虑扁率（即把这些天体当作质点看）。可是，对于另外一些问题，却应当将由于行星对圆球形状的偏离而造成的附加引力考虑进去。（见21节“行星的自转”）

● 地球的赤道半径是6378公里，极半径是6357公里（精度达1公里）。（原注）根据人造卫星观测资料，求得地球扁率更精确的数值是1/298.25。（译注）

5、地球上物体之间引力的实验检测

物体间的相互引力首先从天体检测出来。但是牛顿定律可以应用于任何处的一切物体，因此引力也存在于地上一切物体之间。牛顿发现引力定律之后50年，在18世纪，已经证明实际的情况果真是这样的。1735～1738年间，法国科学家拉·康达米恩（La Con da mine）与布給（Bouguer），在一次赴南美洲的科学远征队的考察中，查出在山麓近旁的铅锤常偏向山的一面。1774年英国科学家马斯基林（Maskelyne）仔细地测量了铅锤的偏向。他在苏格兰珀思郡一座名叫希哈莱昂狭窄山脊的两面，比较了铅锤的方向，发现这些方向相差达24″；这就是说，山的引力使铅锤偏了12″。我们能容易地定出使铅锤线末端的重锤偏向12″所需要的力。将这力和铅锤的重量联系起来，便可求出地球的引力比山的引力大若干倍。再由山的大小和其假定的密度，便可以估计山的质量和整个地球的质量（表为克和吨）。



图 23 山旁铅锤线的偏向

地球的绝对质量的初次测定很不精确，因为山的质量估计不准，英国科学家卡文迪什（Henry Cavendish）于1798年做了比较精确的实验；他不用大山而用质量精确知道的重铅球来测定对小球的吸引力。在这些测量里他用的是扭秤，其主要部分是一条两端附有小球的细小的水平棒，被悬挂在一根细长的弹性纤维上（图24）。设将重的铅球放在密接小球

处，则小球被铅球吸引，使整个水平棒转动，从而使弹性丝扭转。施在小球上的引力可以从扭力测出。将这力和球的重量比较，即与地球的引力比较，可以计算出地球的质量为大球的质量的若干倍。卡文迪什由此求得地球的质量约为6×10^{27}克$=6\times10^{21}$吨。

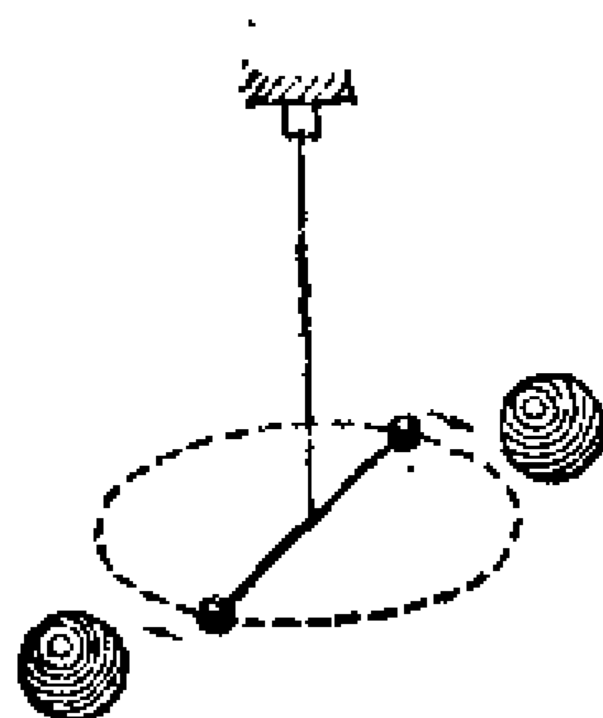


图 24 卡文迪什的实验

自那时以来，进行了许多实验，将重力和地面物体的引力联系起来。这些实验已经相当可靠地得出更精确的地球质量值——5.976×10^{27}克。

已知地球的质量之后，便能计算任何物体之间的引力。为说明计，试求两个各重1公斤的球在相距10厘米处的引力。

设地球的半径为6000公里或6×10^{8}厘米，我们简单计算施于两球之间的引力（水平向）与地球对于其平面上一公斤的每球之间的引力（铅垂向），两力之比值为下式所给出：

$$\left(\frac{6\times10^{8}}{10}\right)^{2}\times\frac{10^{6}}{6\times10^{30}}\approx6\times10^{-10}$$

即地球以1000克的力吸引每球，而它们彼此间的引力渺小得无可比拟，仅有一克力的一千万分之六。

同样，可以计算均匀结构重10,000吨的两球在相距1米处的引力为一克力的十分之一。

以上两例说明地面物体之间引力的微弱，也说明日常生活里为什么我们不能感觉到引力的作用。

但是如果认为万有引力定律在日常生活里没有实际价

值，那便错了。原来地面上重力加速度不是到处一样的；它随被吸引的质点与地心间的距离而变化。由于地球是扁球（两极处变平），其赤道半径比极半径稍长，重力加速度在赤道比在两极稍大一点。● 重力加速度可在不同海拔高度处测量。由地面经、纬度不同的地方测量得的结果，使人们得知地上各处与地心距离的变化，从而求得地球的确切形状。

但是，如果我们将海拔高度以及由地形而来的重力变化一并加以考虑，那便发现某些地方的重力加速度有附加的偏离。这叫做**重力反常**。这些反常现象的原因，是地壳上层的结构不均匀。这些岩层中某些地方可能含有重质岩，另一些地方可能含有轻质岩。在前一情形，重力加速度比其平均值略高，而在后一情形，重力加速度比其平均值略低。这种重力反常现象的大小与性质，便是地壳里密度不同的岩石分布的一种线索。因此人们可以从这里"窥测"地球内部而大致了解其地质结构。这对于寻找矿源（地质探矿）是有裨益的。

研究重力加速度变化的科学叫做**重力测量学**。这门科学的发生，表明从"天上"发现的定律怎样对纯粹是地上问题的研究，有广泛的用途。这也生动地表明"地"和"天"之间没有不可逾越的鸿沟；自然界是一个统一的整体，相同的定律在宇宙里到处一样地有效。

● 在赤道上，重力加速度还由于离心力的作用而缩小；离心力在两极处为零，在赤道上最大。

6、牛顿定律——天体运动的理论基础

牛顿发现的力学定律和引力定律，不但解释了行星的视运动，而且为天文学开辟了崭新的前景。这是研究天体运动的科学——天体力学的基础。

牛顿以前，天文学的唯一目标是根据天体的视轨迹，去推导它们在空间里的真运动，再利用某些几何学的概念去描述这些真正运动。因而天体运动的研究是几何学的、描述性的。

自支配天体运动的万有引力定律发现以后，运动的理论探讨代替了描述的方法。现在人们能解决天体在相互的引力作用下运动的理论问题。天体在过去与将来的运动不再是一种猜度的事情和类比的推测，而成了数学计算的课题。

将天体运动问题作为相互引力下的普通物体课题来解决的首先是牛顿。其中最簡单、也是最基本的，便是按牛顿定律互相吸引的两个物体的运动问题（两体问题）。

我们已经讨论过，从一个给定的运动，决定力的问题。我们說过：如果物体在椭圆上运动，力心在其一个焦点上，那么这运动就应当起因于引力中心，而且这力应当是按距离平方反比而变化的。现在的问题正好相反，即从一个给定力去决定物体的运动。我们需要求出的是物体怎样受力心吸引而运动。

图25表示力心 C，可把它视为一个质量为M的质点，按照牛顿定律吸引别的物体；物体B在力心C的引力作用下运动。C吸引B的力是：

$$F = f\frac{Mm}{r^2}$$

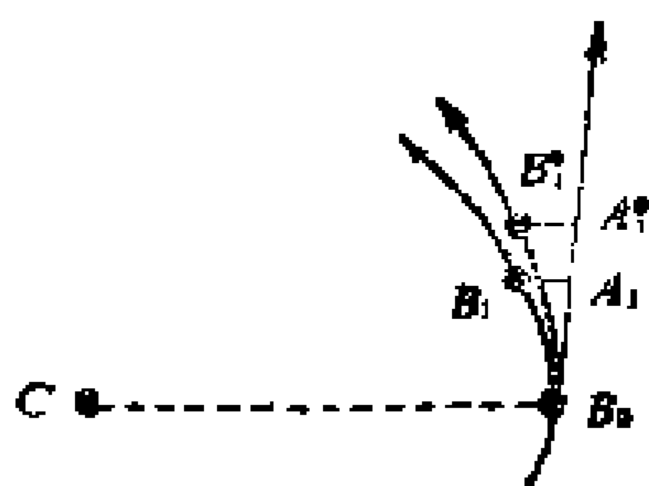


图 25 引力使物体不断弯曲所经过的轨迹

式内r是c和B之间的距离、m是B的质量，f是引力常数。fM是牛顿所说的“中心处的绝对力”。

设于某一瞬间t_0物体B在B_0位置上，t_0叫做初始时刻。这以后，物体依赖它在初始时刻具有的速度而运动。设这初速度为v_0，其方向如图25内所表示。设B没有受到任何别的力的作用，它便以不变的速度v_0作匀速直线运动，在短的时段Δt内，它走过路径B_0A_1。但是中心C的引力，使它偏离这直线而走一小段弧B_0B_1。B_1A_1便表示它对直线的偏离度；这段距离是与引力的大小有关系的。从物体的已知运动求力时，B_0B_1弧与B_1A_1距离都属已知，我们必须从这距离去确定力。可是在这新问题里，力是给定的，我们必须求出B_1A_1和物体在曲线上的位置B_1。因为由C点的引力而来的加速度（即物体B的速度的变率）是已知的，所以我们还可以求出物体到达B_1的速度。根据相似的推理，我们可以求出下一时段Δt以后物体的位置B_2，如此类推下去。

这样，我们可以求出决定物体B的路径的B_1、B_2等点。

假使初速度不同，物体运动的性质也会改变。我们讨论另一初速度，即大于v_0的v_0^*。在Δt时段内物体以这速率，将走比B_0A_1长的一段距离$B_0A_1^*$（图26）。但是只要C处之力是相同的，则这两种情形下B的运动对于直线的偏离也是相同的。因此，如果两小段弧B_0B_1与$B_0B_1^*$表示物体在这两情

形所走过的实际距离，那么B_1A_1与$B_1^*A_1^*$应当相等。因此，如图26所表示的，增加初速度，便减少轨道的曲率。

牛顿证明，如果物体在给定位置（就是从B到C的距离）的初速度（为简便计，设$v_0 \perp B_0C$）不超过数值$\sqrt{\frac{2fM}{r_0}}$时（式内fM是中心处的绝对力，而r_0是初距离），那么物体B将画出一个焦点，在C的椭圆。如果初速度小，那么这椭圆将沿B_0C直线大大拉长，而初位置B_0成为远日点（图27）。如果初速度增大，那么椭圆的范围也增大，物体在这椭圆轨道上的周期也加长。

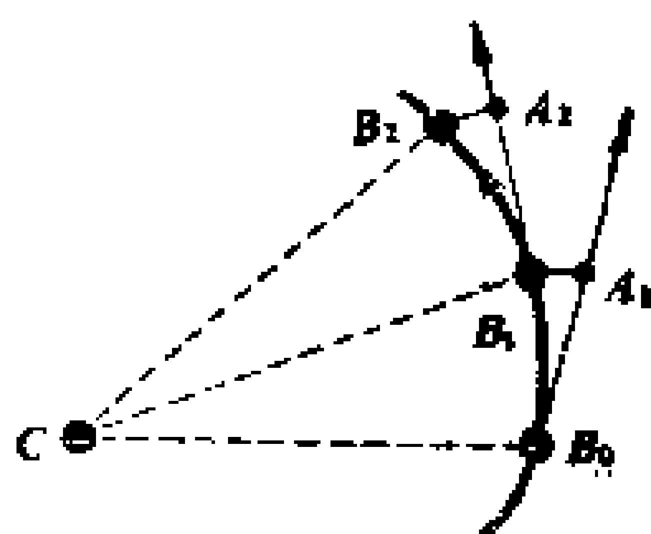


图 26 初速度愈大，行径的曲率愈小

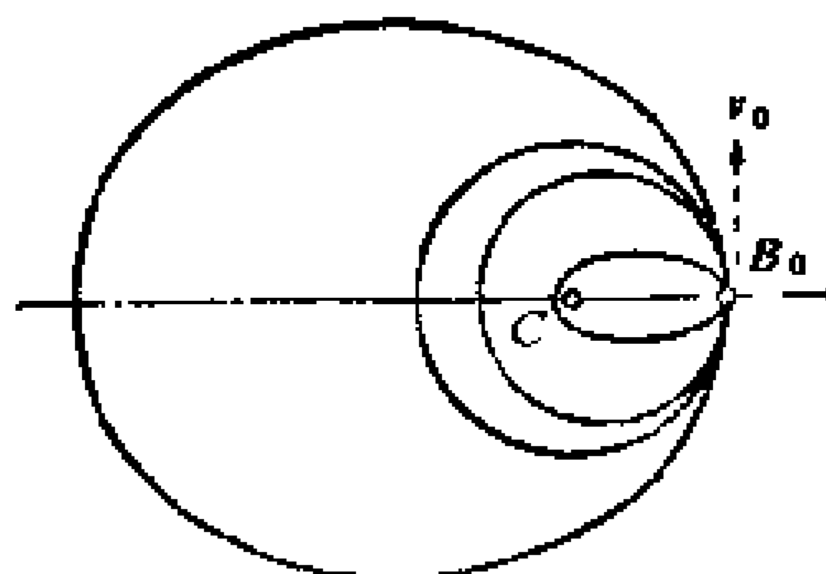


图 27 在引力场内以小于临界值的速度运动的物体的轨道

起初，速度增加将使椭圆扩展大于伸长，于是它逐渐成为圆形。当初速度$v_0 = \sqrt{\frac{fM}{r_0}}$时，曲线成为正圆。这速度叫做圆周速度。初速度进一步增加，将出现愈来愈长而不扩大的椭圆。它的半长轴和B离开C的最大距离增加得愈来愈迅速。当$v_0 = \sqrt{\frac{2fM}{r_0}}$时，曲线便不再闭合。椭圆的半长轴变为无限大，而初速度将是这样大，以致中心C的引力不再能

使B返回，即永远离开C点而去。牛顿证明，这样形成的轨道是抛物线。图28便表示抛物线的一支（图28内中间的一条曲线，另一支以虚线表示），B点将沿着它奔向无限远处，一去不复返了。初速度$v_0=\sqrt{\frac{2fM}{r_0}}$叫做临界速度或抛物线速度。

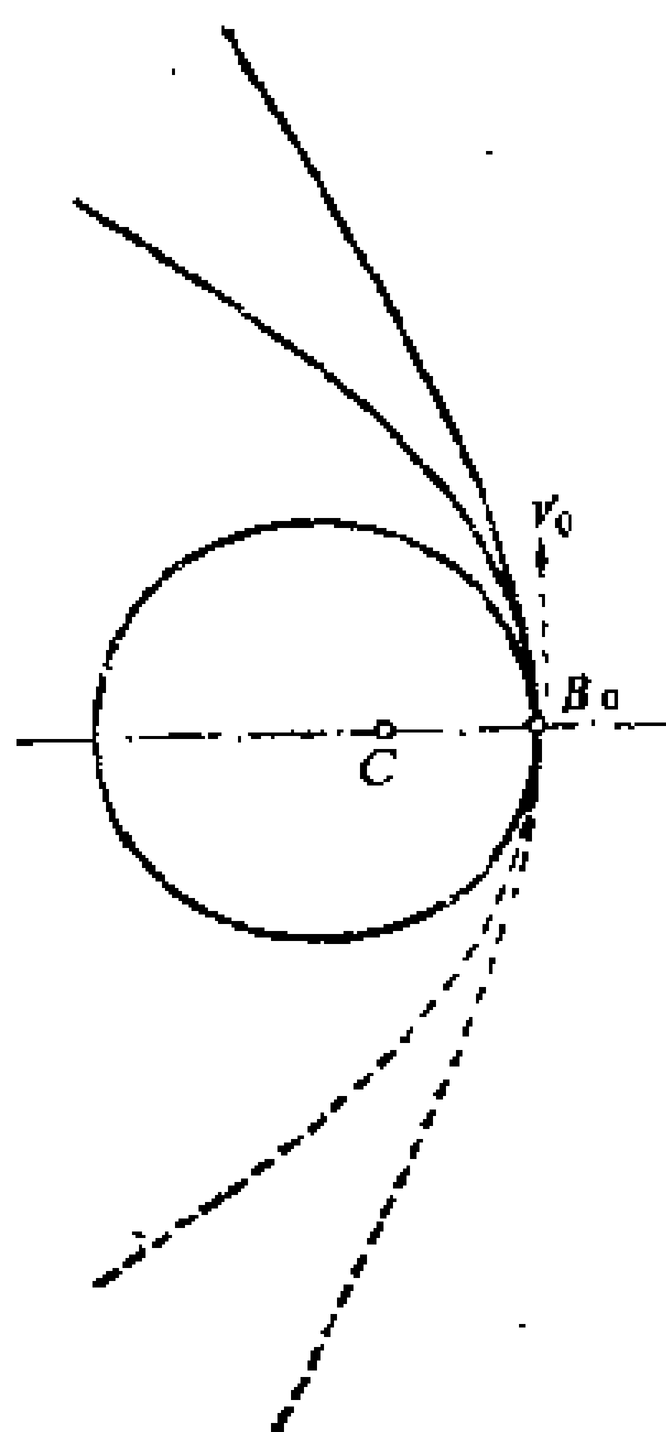


图 28　椭圆、抛物线与双曲线

在$v_0>\sqrt{\frac{2fM}{r_0}}$的情形下，物体B更不能复返C点。如牛顿所证明的，它将在一条叫双曲线（图28最外面一条曲线）的开曲线上运动。初速度v_0愈大，双曲线的曲率愈小，B离开C愈快。

因此，物体B围绕吸引中心运动的轨道只能是圆锥曲线；如果初速度不超过临界速度，那就形成椭圆（闭合曲线）；如果初速度等于或大于临界速度，那就形成抛物线或双曲线(开曲线)。在初速度方向正与B_0C正交，而数值又恰等于$\sqrt{\frac{fM}{r_0}}$时，B将在以C为中心的正圆上运动。如果B的初速度为零，那么它在重力作用下沿B_0C直线落向C点。在B落向C的途中，引力增大，从而B的加速度也不断地增大。

在天体的轨道周期，长轴半径和力心的质量M之间有一

重要关系：

$$T^2=\frac{4\pi^2a^3}{fM}$$

这关系使我们想起开普勒第三定律（牛顿便根据他的定理，推出开普勒的这个定律）。现在我们可以比较天体所围绕运行的力心的质量。

试讨论地球围绕太阳、月球围绕地球的运动。设将地球和月球的轨道周期分别表为$T_{地}$与$T_{月}$，日-地间和月-地间的平均距离分别表为$a_{地}$和$a_{月}$，太阳与地球的质量分别表为M和$m_{地}$，则求得：

$$T^2_{地}=\frac{4\pi^2a^3_{地}}{fM}与T^2_{月}=\frac{4\pi^2a^3_{月}}{fm_{地}}$$

于是 $$\frac{T^2_{地}}{T^2_{月}}=\frac{a^3_{地}}{a^3_{月}}\times\frac{m_{地}}{M}$$

故 $$\frac{m_{地}}{M}=\frac{T^2_{地}}{T^2_{月}}\times\frac{a^3_{月}}{a^3_{地}}$$

将以下的近似值代入上式：$T_{地}=365$日，$T_{月}=27$日，$a_{月}=384,000$公里，$a_{地}=150,000,000$公里，便得：❶

$$\frac{m_{地}}{M}=\frac{365^2}{27^2}\times\frac{(384,000)^3}{(150,000,000)^3}\approx\frac{1}{330,000}$$

同样，我们可以将有卫星的行星的质量与太阳的质量比较，或有卫星的两个行星的质量互相比较。因此，牛顿求得了那时已知有卫星的木星和土星的质量。结果木星和土星的质量分别为太阳质量的1/1000和1/3000。

---

❶ 牛顿求得的地球的质量只有太阳的质量的1/170,000，因为那时日-地间的距离还知道得很不准确。

这些天体质量的初次确定表明，行星的质量比太阳小得多。研究行星围绕太阳或卫星围绕其本行星的运动时，我们可以应用以上讲过的两体问题的结果，只须假设太阳作为一种情形的力心，行星作为另一情形的力心。可是行星围绕太阳的运动与上述围绕力心的运动有少许的差异。我们原来认为力心是固定的，因此没有考虑这物体施于这力心的引力。可是据牛顿的运动第三定律，每个行星应当吸引太阳，太阳也应当由于行星的吸引而运动。

现在考虑行星与太阳按牛顿定律互相吸引。设它们的质量为m与M，则它们之间的相互引力将是：

$$F = f\frac{Mm}{r^2}$$

$W = W_P + W_S$

图29 计算两体问题里的"绝对中心力"。

式内r为距离PS（图29）。太阳S赋予行星P的加速度 $w_P = \frac{fM}{r^2}$，同时行星以相同的力吸引S，赋予太阳以加速度 $w_S = \frac{fm}{r^2}$。太阳S的加速度小于行星P的加速度，太阳的质量M大于行星的质量m，显然太阳的加速度很小，可是重要的是有这样一个加速度。

现在讨论：太阳上观测者看见的行星P相对于太阳S的运动。行星P的相对加速度将等于加速度 w_P 与 w_S 之和，即

$$w = w_S + w_P = f\,\frac{M+m}{r^2}$$

因此，如果我们考虑P围绕S的运动，太阳成了一个固定的力心，从P到S的加速度便如同具有质量M＋m的吸引体所造成的。于是规定中心的绝对力的系数将是f（M＋m）。

因此从围绕力心推导得来的有关临界速度和轨道周期等所有的一切方程式，在这个“中心的绝对力”的新意义下而仍然有效。设P围绕S作椭圆运动，则

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{f(M+m)}$$

如果有质量为m_1、m_2……的几个天体围绕一个单体的运动(例如几个行星围绕太阳的运动)，而它们的周期为T_1、T_2……，轨道半长轴分别为a_1、a_2……则

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{f(M+m_1)}; \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2 a_2^3}{f(M+m_2)};$$

$$T_1^2 : T_2^2 = \frac{a_1^3}{M+m_1} : \frac{a_2^3}{M+m_2} \cdots\cdots。$$

这关系表明，行星围绕太阳运动的轨道周期的平方不恰好和它们的椭圆轨道的半长轴的立方成正比例。严格地讲，开普勒第三定律只是近似的定律。可是由于行星的质量与太阳的质量比较是很小的，即$(M+m_1):(M+m_2):\cdots\cdots \doteq 1$，从而$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \cdots\cdots$，使开普勒第三定律得到差不多的满足（见§2，表1）。

方才研究过的运动是一天体围绕另一天体的**相对运动**。但是从两体外的一个固定点看，由于相互的加速度使P和C两体都在运动。牛顿证明过，C和P的引力中心将静止（或作匀速直线运动），而这两体自身可能围绕这个引力中心运动。它们的轨道将与P围绕C运动的轨道相似。

如果中心C的质量M比较物体P的质量m大得多，那么P给予C的加速度便可略而不计，而C和P的引力中心基本上与C重合。于是我们可以说，C是固定的，P绕固定的中心

运动。

现在举地球围绕太阳的运动作为例子来说明。因为地球的质量只是太阳的质量的1/330,000，那么这两体的引力中心位置在距太阳中心：

$$\frac{150,000,000}{330,000} \doteq 500\text{公里}$$

这意味着太阳的中心围绕日地两体的引力中心描绘了半径约为500公里的正圆。这只等于太阳的直径（1,400,000公里）的1/2800。与太阳的大小和日-地间的距离联系来看，太阳位置的这种微小的振动是可以忽略的，因此在这意义下，基本上太阳是固定的。

但是为了计算地球围绕太阳运动的轨道周期，地球质量的知识是必需的。从$T^2 \sim \frac{a^3}{fM}$与$T^2 \sim \frac{a^3}{f(M+m)}$两式所算出的地球轨道的周期之差大约是100秒。这是可以感觉到的数量。

7、天体运动与两体问题

按照牛顿定律互相吸引的两体运动问题，在天文学上有广泛的用途。行星围绕太阳的运动首先被看做是由于按照牛顿定律的太阳引力所致的运动。相同的方法用于小行星和彗星围绕太阳，卫星围绕原行星运动的基本研究。因为行星、小行星和卫星都在椭圆轨道上运动，是与两体问题一致的。

一个天体在空间椭圆轨道上的运动，完全为六个量所确定，它们叫做轨道根数。

两个根数——**交角和升交点黄经**——确定轨道平面在空间里的位置。

交角是行星的轨道面与黄道面（即地球的轨道面）之间的角i。

行星的轨道面与黄道面相交的两点叫做**交点**。在升交点☊附近行星由天穹的南半球进入北半球，在降交点☋附近行星由北半球进入南半球。天上的♈点（即春分日太阳所在之处）方向与行星轨道升交点☊之间的角距离叫做升交点黄经。

第三根数——近日点与交点间的角距离——是升交点的方向与近日点方向之间的夹角ω。这根数有时又有另外一种定义。我们将行星的轨道面与黄道的交线叫做**交点线**，而将近日点P与远日点A的联线叫做**拱线**。于是近日点与交点间的角距离决定交点线与拱线间的夹角ω。

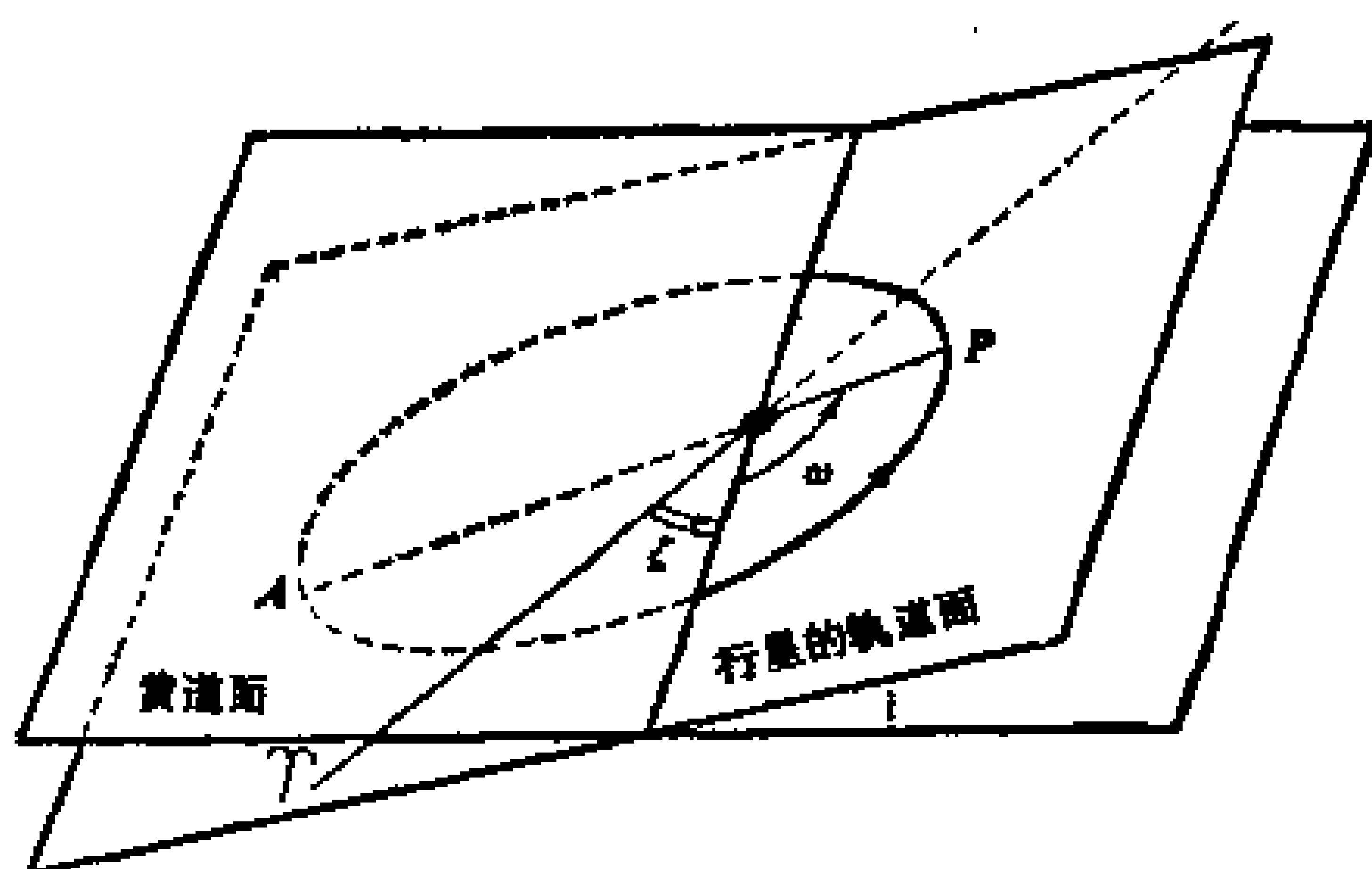


图 30　行星的轨道根数

第四、第五根数——**半长轴**和**偏心率**——决定天体椭圆轨道的大小和形状。

最后，第六根数决定天体于某一瞬间在其轨道上的位置，这一瞬间一般取为行星过近日点的时刻。如果已知天体在轨道上的初位置，那么根据它的运动的平均速度并运用面积定律，就可以计算出它在轨道上的速度，从而求得任何时刻它在轨道上的位置。如果已经知道轨道在空间里的形状、大小和位置，那便可以决定该天体在空间的位置，然后计算它在天穹上的视位置。

水星、金星、地球、火星、木星和土星的椭圆轨道的决定没有什么困难，因为这些行星已经为人们观测了许多世纪，它们在天上的位置的数据是很多的。这些轨道首先由开普勒推算出来。随着时间的推进，新的更精确的观测数据，使这些轨道根数得到改进。●

表2列出九大行星的几个轨道根数（根据现代数据）。

表2

行星	半长轴		轨道周期	偏心率	交角
	A.U①	10^6公里			
水星	0.387	57.9	87.97日	0.206	7° 0′
金星	0.723	108.2	244.70日	0.007	3°24′
地球	1.000	149.6	365.26日	0.017	——
火星	1.524	227.9	1年322日	0.093	1°51′
木星	5.203	778.3	11年315日	0.048	1°18′
土星	9.555	1429.8	29年167日	0.056	2°29′
天王星	19.218	2875.0	84年 7日	0.046	0°46′
海王星	30.110	4504.4	164年280日	0.009	1°47′
冥王星	39.518	5911.9	247年255日	0.249	17° 9′

① A.U.天文单位，即日地间的平均距离，常用以表示太阳系里的距离。

● 17世纪末，望远镜开始用以观测天体的位置，使观测的精度大有增加。

由表可见，除了水星和冥王星之外，一切大行星的轨道交角和偏心率都小，换句话说它们的轨道实际上是在同一平面内（图31）的近似正圆。

两体问题也成功地用以研究小行星、彗星和大行星的卫星的运动。这问题最初用于小行星和彗星，使牛顿理论得到进一步的验证，因而显得特别重要。

彗星——“披长发”的发光体，在人类历史的早期便被观察到了。牛顿以前，大多数天文工作者都认为它们是地球大气里的现象。伽利略和开普勒认为它们是天体，但是不能解释它们的奇怪运动。他们不能理解彗星为什么突然出现，又消逝无踪。

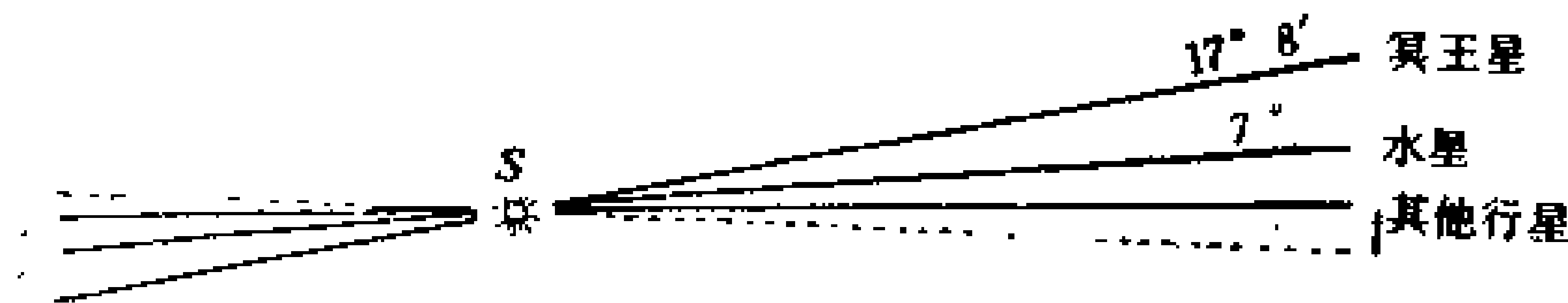


图 31 太阳系里行星的轨道交角

牛顿说，因为彗星是天体，所以它们也应当遵循引力定律。果真是这样，它们便是由于受到太阳的引力而运动。但是它们的轨迹是怎样的呢？两体问题里有三种类型的运动：椭圆、抛物线和双曲线运动。牛顿必须排除多少近似正圆的椭圆运动，因为彗星显然不象行星那样经常地围绕太阳运行。它们的轨道或许就只能是抛物线和双曲线。也可能是很扁长的椭圆，因为在这种轨道里运行的彗星，只在近日点附近才为人们观测到一段短时间，然后便远离太阳长期不能为人看见了。

于是便产生了决定彗星在空间里的轨迹问题。一切彗星的观测期都比较短暂，而且它们在天穹上的位置的记载也很稀少，这便使这问题很不容易解决。牛顿用几个观测数据解决了决定抛物线轨道的问题。他证明，如果已知三个不同时刻的彗星位置，那么怎样能求得在空间运动的彗星的抛物线轨道根数。牛顿将他的方法应用于1680与1682年观测到的两颗彗星。他计算了它们的抛物线轨道根数，直到它们在视野里消逝之前，它们在天空的计算的位置与观测的位置都很吻合。这便证明彗星是在太阳引力下运动的天体。这发现便成了新的引力理论最初的一个显著成就。

牛顿的学生哈雷（Halley）使用这个方法计算了主要出现于16与17世纪里的24颗彗星的轨道。这些彗星的保存下来的位置记录被用作出发点。他注意到，1682，1607，1531年出现的三颗彗星的抛物线轨道极其相似。更有甚者，这三次出现期的时间间隔大约相同：1607－1531＝76年与1682－1609＝75年。于是哈雷想到，三次观察到的，实际上不是三颗不同的彗星，而是一颗相同的彗星，它不是在抛物线上，而是在很长的椭圆上运动。这种很长的椭圆在焦点附近差不多和抛物线重合；而彗星总在太阳（焦点）附近才为人观测到。我们很难区别抛物线运动和很长的椭圆运动。

哈雷预测这颗彗星下次的出现期在1758～1759年间。这颗彗星果然于1759年出现了。这是引力定律的正确性的一个有力的证据。

在小行星发现上，引力理论也取得一样的成功。

1801年1月1日意大利天文学家皮亚齐（Piazzi），在他的望远镜里观测到一个天体很象恒星，但它在恒星间迅速地运动。这类似行星的视运动，并且表明它相对地接近太阳。

皮亚齐很快便看不见这个天体，因为它接近太阳，消逝在日光里了。问题是怎样根据皮亚齐的观测资料去决定这个天体在空间里的运动，这问题为德国数学家高斯（Gauss）所解决。他找到了根据几次观测决定椭圆轨道的一个方法。高斯证明，如果已知一个天体于三个不同的时刻在空间的位置，那就能够定出这天体运动的椭圆轨道。从观测决定椭圆轨道，证明比决定抛物线轨道要困难得多。但是高斯解决了这个问题，而且用的数学形式，是这样严密，以致他决定椭圆轨道根数的方法，直到今天还算是最好的。

高斯假设皮亚齐所发现的天体是由于引力而围绕太阳运动，而进行计算的，结果表明，它在椭圆上运动，其半长轴约为2.8天文单位，偏心率为0.08；这意味着这天体的轨道在火星与木星的轨道之间，而且是属于太阳系的。高斯计算出几个时间这天体在天空的位置，从而指出将来可以在哪里观测到它。那年（1801）末，果然在高斯预测的位置上找到了这个天体。这样，太阳系里便觅得一个新的行星，皮亚齐将它命名为谷神星（Ceres）。

跟着便很快发现了另外三颗类似的行星。它们在望远镜里看起来象恒星，但是运动却象行星。由于和**大行星**（即表2内所列出的九大行星）比较它们的体积很小，因而叫做**小行星**

到1976年止，经过发现而且计算出轨道的小行星，已经超过2,000多颗。每年还在发现愈来愈多的小行星，并推导出它们的轨道。

小行星的体积和质量都比大行星小得多。最大的小行星直径只有200～800公里；至于只有最大的望远镜才能观测出来的最小的小行星，不超过一、二公里长。许多小行星的形

状象岩石块，颇不规则。

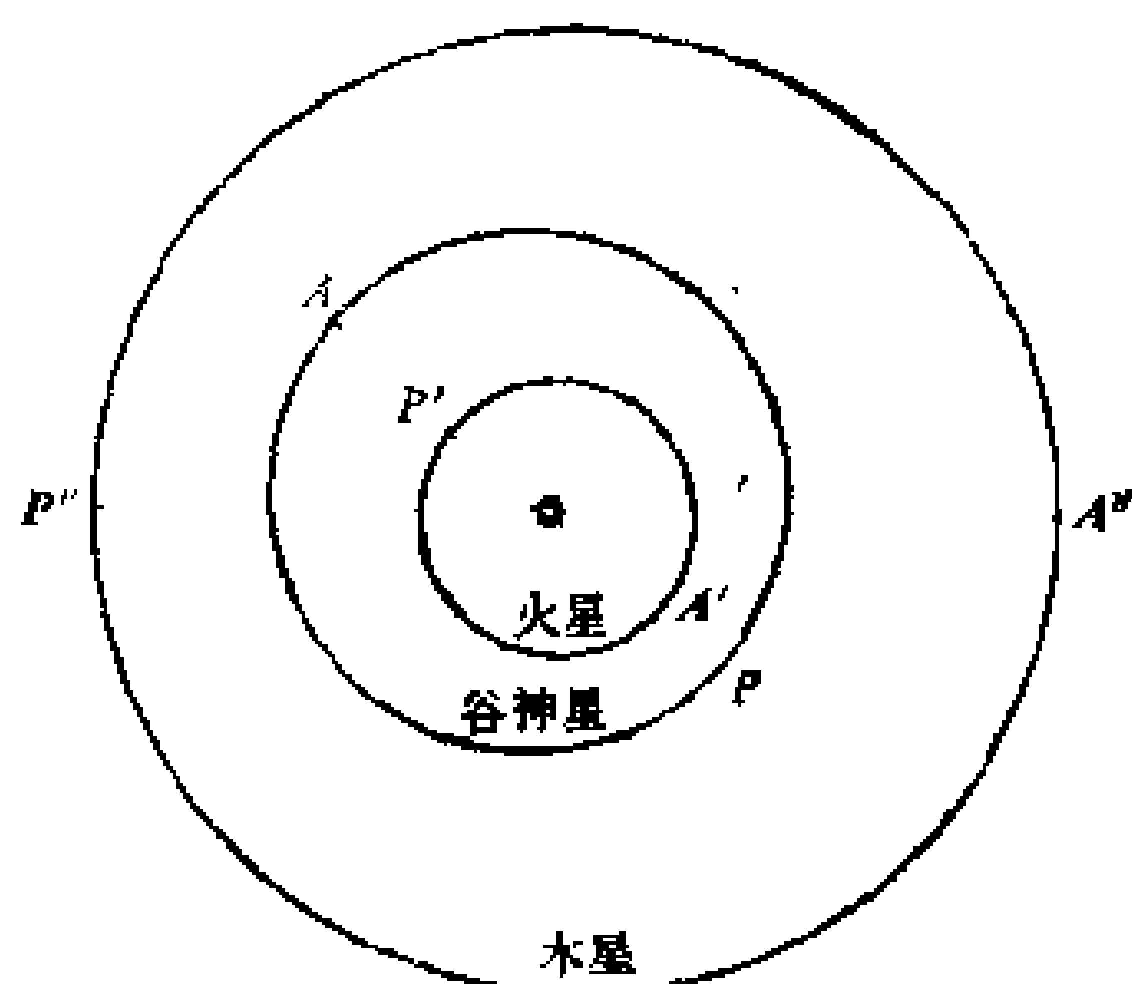


图 32 谷神星的轨道（A与P表示轨道的远日点与近日点）

8、受摄运动的概念、天体力学与实用天文学

根据两体问题对于行星和彗星轨道的描绘和研究，只是探索天体复杂运动的第一步。事实上，如果一个行星（例如地球）只受太阳的引力，那么它便严格地在椭圆轨道上运行。适合两体问题的这类运动，叫做无摄运动。但是太阳系里一切天体都是互相吸引的。这样，地球不只受太阳、而且还受其它行星的吸引，因而使地球偏离其椭圆轨道。反过来，地球也吸引其它行星，强迫它们偏离椭圆轨道。牛顿引力定律的一个结论是，太阳系里的一切行星、小行星和卫星都互相吸引，互相使对方偏离只由太阳的引力作用而运行的轨

迹。卫星也因受太阳和其它行星的引力，而改变它们的椭圆运动。

此外，行星的形状不是正球，因而其引力并不严格地遵循距离平方反比定律。虽然在实际上，只讨论太阳——行星的相互作用和行星的相互吸引时，这是可以略而不计的，但是卫星理论需要考虑这些事实。例如，月球即使没有太阳和行星的引力，也不围绕地球走一个严格的椭圆轨道。

总之，太阳系里没有一个物体的运动轨道真正是椭圆、抛物线或双曲线的。摄动这个总的术语便表示对于椭圆、抛物线或双曲线运动的各种偏离。行星、小行星、卫星和彗星叫做受摄体。摄动是极端纠缠不清的现象，要探讨它们是一种很繁复的工作。但是，如果忽略摄动，那么只能得到许多天体运动的相当粗糙的图象。

在开普勒时代，人们用肉眼观测和决定天体的位置，行星对于无摄轨道的偏离还不显著。但是在17世纪中叶，望远镜和其它测量仪器开始用于此项工作；由于天文仪器的改进，天文观测日益精确。于是，太阳系里行星和其它天体的运动，对于开普勒定律的偏离，便不能再忽略了。

从18世纪开始，天体力学上的一个主要问题，便是确定行星、小行星、卫星和彗星的摄动。决定摄动的方法和解决天体力学上其它重要问题的思维，便和高等数学的方法相伴地发展起来。现今的天体力学是18和19世纪几位大数学家所创建的，他们是克莱洛（Clairaut，1713～1765）、达朗贝尔（d′Alembert，1717～1783）、欧拉（Euler，1707～1783）、拉格朗日（Lagrange，1736～1813）、拉普拉斯（Laplace，1749～1827）等人。而到20世纪，又给天体力学的武库增添了新的有效的数学技术和高速电子计算机。

促进天体力学发展的主要原因有二：

第一是实用天文学上的直接需要。人们要求天体力学去解决许多具有巨大实际意义的问题。在18世纪天文钟发明以前，一个这样的问题便是建立月球运动的精密理论。那时利用月亮的观测去定地面的经度。

要测定地面一个给定点的经度，便必须于一个给定的时间将该地点的地方时与经度已知的另一地点的地方时加以比较。● 给定点的地方时容易由太阳或恒星的直接观测去决定。但是在茫茫大海里人们怎样知道另一地点（如格林尼治）的地方时呢？自然，在今天，有专用的无线电台来播发时间信号，用于计算格林尼治时间。在19世纪，无线电技术发明以前，人们使用很精确的天文钟。人们可以携带这样一种天文钟航海或到一个不明经度的地区去考察，这样便随身"携带"着格林尼治平时了。但是在18世纪，人们既没有无线电，也没有天文钟，要求得格林尼治时刻的最精确的时计就是月亮。

月亮在恒星间运行很快，每小时大约行30′。因此人们可以将星空背景当做钟面，月亮作为钟面上的时针。唯一的工作便是刻划出这个特殊的标度盘，为此我们可以求助于根据月球运动理论特别编制的一个表，指示在格林尼治时间的某些确定时刻月亮在群星中的位置。自然，这个"天文时间表"应当达到足够的精确度。为了从格林尼治地方时，得到测点的经度，使它的误差不超过一分（相当于确定地面上一点的误差30公里），便必须知道月亮在天空中的位置，精确到15″。要建立这样的月球运动理论是很困难的，因为月球

● 地球上各处的经度是从经过伦敦格林尼治天文台的子午圈开始量度的。因此为了测定一个地点的经度，最方便的方法是知道格林尼治的地方时。

式内ε是一个很小的数。

但是克莱洛后来发现他的数学演算过程是不正确的，因而未能全面考虑月球运动里的一切摄动。在误差都消除之后，理论与观测间的不符也就消失了；于是他才明白引力的表达式里并不需要附加项$\frac{\varepsilon}{r^3}$。

在其它一些事例里，例如对于水星运动的研究，有人提出引力应当按距离的（$2+\delta$）次幂的反比而变化（δ是一个很小的数）。但是这也是错误的。牛顿定律所描述的行星运动与目前观测结果达到相同的精确度（一个例外，见24节）。

因此，牛顿所建立的质点间的引力与它们之间的距离的关系，目前已经没有丝毫可以怀疑之点。牛顿的万有引力定律，得到观测上和理论上的一切发现的完全支持。

9、描述受摄运动的方法
变化的轨道

前一节已经指出，我们可以简单地将摄动看做是物体在无摄运动与受摄运动两种位置上的差异。但是摄动也可用欧拉在1756年（刊布于1771年）首先发明的方法来表达。这方法建立在所谓**变化的轨道**的概念上。

如果已经知道某一瞬间一个物体的运动速度和在空间里的位置，那便可以决定它在没有摄动的情形下，围绕太阳运行的轨道（椭圆、抛物线或双曲线）。假设已经找着某一瞬时行星的椭圆轨道，但在摄动的影响下，行星偏离了这个轨道。如果过一段时间以后，又根据新的观测数据计算出它的

椭圆轨道，那么结果自然是另外一个椭圆。如果摄动小，那么这个新的椭圆与以前那个椭圆相似，即新旧两组轨道根数相差不大。如果再经过一段时间以后，便进行这种计算，轨道根数又发生变化。因此，我们可以想象，每一瞬间行星在一个新的椭圆轨道上运行，但是轨道根数，即空间里椭圆的大小、形状和位置在不断的变化。在这种情况下，我们说行星运动在**变化的椭圆轨道上**。

如果行星或其它天体在轨道上运行一周内，没有受到显著的摄动，那么在这时间内它差不多正好在同一椭圆上运动。但是摄动是随时间而积累的。在每个随后的周期里，行星都运行在略有差异的椭圆上。经过长时间以后，这椭圆的形状、大小和位置可能发生显著的改变。例如目前地球所运行的椭圆的大小和形状几乎与1700～1800年以前相同，也差不多位于相同的平面上。然而它的轨道已经从这平面上旋转了大约5°。1850年木星的半长轴为5.20265天文单位，而1950年却变为5.20290天文单位——增长了大约40,000公里。

现在如果摄动相当大，那么甚至在一个轨道周期内，天体的轨道也会偏离原来的椭圆。换言之，在一个公转周期的起点和终点两次算出的轨道根数，便显著的不同。例如，取每个月初和月末月球的轨道根数，那就会发现，在一个月内它的椭圆轨道已经从原来平面转过了3°。但是即使是这样，在某一给定瞬间的这种变化的椭圆轨道根数，也给出一圈或几圈的运动相当好的图象。

变化轨道中的根数变化，对于与一给定天体的运动中有何种类型的变化提供一个线索。例如半长轴的增长意味着天体在一个不断增大的椭圆上运行；换句话说，即这天体正在逐渐离开中心天体。如果偏心率增大，那么椭圆轨道便在伸

长——即近中心距在变短，远中心距在变长。

由此可见，天体的受摄运动可以利用随时间变化的轨道根数去描写。一切行星、小行星和卫星的运动，都是受摄运动，因此每一瞬间，它们的轨道都由特定的根数值来描述。在第7节的表2内所载的大行星的轨道根数，不是不变的确定常数。这些根数属于一定的历元（如1900年初）。但是由于行星的摄动很小，因此这些根数随时间的变化很慢，所以能够描述未来相当长一段时间内的行星运动。

10、太阳系里的运动问题

太阳系里天体运动的问题确切的陈述包含以下的内容。

太阳系里有太阳、行星、它们的卫星、小行星和彗星。所有这些天体都按照牛顿定律互相吸引。问题是：在某一初始时刻，天体的位置和速度已知的时候，用数学来研究它们的运动。

当然没有必要把一切天体的相互影响都考虑进去，以这样普遍的形式来表述问题。因为与行星比较，彗星和小行星的质量是很小的，所以它们能够给予太阳和行星的加速度是完全可以忽略的。彗星的质量很小，因为我们从来没有查出它们对任何行星或卫星产生摄动。1886年，一颗彗星逼近木星，正好在它的卫星之间经过。但是这些卫星并没有表现对原来运动有丝毫的偏离。由此断定，这颗彗星的质量只及地球的质量的100万分之一。

最大的小行星的质量当然比彗星的质量要大得多。试估计最大的小行星——谷神星——的质量，它的直径长800公

里。如果这颗小行星的密度和地球的密度● 相同，那么它的质量便大约是地球的质量的 $(800/12,800)^3=\frac{1}{4,096}$。有几颗小行星的直径在100～300公里之间，而大多数小行星的体积都很小，因此所有小行星的质量加在一起不会超过地球的质量的1/700。质量如此小的天体，自然不会显著地影响行星和卫星的运动。

因此，我们可以认为，行星和它们的卫星的运动与小行星和彗星的运动无关。

再说，卫星的质量只是行星质量的一个分数。例如，木星的"月亮"中，木卫三质量最大，也只有木星质量的1/12,200，在木星之外100万公里处运行。在相互引力影响下，木星和木卫三绕共同引力重心在各自的轨道上运行，这重心距离木星的中心只有大约1,000,000/12,200＝80公里。这些相对很小的偏离，对于太阳与木星之间的引力实际上没有什么影响。同时从地球上观测，实际看不出这些微小的偏离。即使在地球与木星最接近时，它们引起的木星视位置的移动也不超过1/30″。其它几个木卫对于木星的影响还要更小些。土星、火星、天王星和海王星的卫星对于它们的本行星的影响也是可以忽略的。一个例外便是我们的月亮，它的质量是地球的质量的1/81.5。月球和地球围绕它们的共同引力中心运动，这一中心距离地心约4,700公里。地球对它的轨迹有这样大的偏离，是可以觉察到的，特别是在对地球围绕太阳运动的精密研究中。例如由于计入地心绕这引力中心的运动，地球一太阳间方向与不计入时相比，要差6″。因此，在精密研

● 地球的平均密度是5.5克/厘米³，其它大行星的密度都比它小。

究中，我们总是将地球和月球的运动结合起来讨论，即将整个地一月系统，与这个系统的引力中心围绕太阳的运动结合起来讨论。

所有这一切意味着，我们并不将太阳系里的一切天体结合起来讨论，而只分别提出a）行星，b）它们的卫星，c）小行星，d）彗星的运动的问题来研究。

在研究行星运动时，考虑太阳的引力和行星间的相互吸引。换言之，问题就是十个天体（九大行星和太阳）按牛顿定律互相吸引的问题。

在探讨行星的卫星的运动的时候，卫星的运动被认为是在行星的吸引（主力）、卫星之间的扰动互相吸引、以及太阳和其它行星的扰动吸引的作用下而发生的。因为小行星和彗星的质量极小，所以它们不能对太阳系里其它天体的运动起显著的作用。由于这个缘故，彗星和小行星的运动都作孤立看待的，好象它们受太阳和大行星的吸引，而它们自身并不互相吸引。

纵然经过这些简化，我们所必须处理的总还不是两体运动，而是三体或多体的问题。就数学观点看，这问题是这样复杂，以致到今天还没有得到普遍形式的解。换句话说，我们不能得到表达多体运动的方程式，使我们得以计算它们在空间的位置，或者就任何质量或初始位置和初速度去了解它们的性质。自然，我们不能作为通例用文字描述这些运动，如象处理两体问题那样。

事情不仅是问题在数学上的复杂性，而且是运动（即使是二体运动）本身的复杂性就使人感到难以想象。我们试讨论一下三体问题，便可以得到这些困难的概念，设这三体为太阳S，木星J和流星体M（其质量不过几克）。由于流星体

的质量小，因此这样一个流星体只能给予木星以极其微小的附加的（即摄动的）加速度，而木星可以看作只在太阳引力影响下作椭圆运动，同时流星体的运动却受到太阳和木星的引力的作用。在天体力学上，这叫做“限制性三体问题”。这里“限制”的意义是小天体（流星体）对于其它两天体的影响可以略而不计，而这两天体的运动是已知的。

当流星体距离木星相当远时，木星的引力对于它只是太阳引力的一个分数，流星体围绕太阳在椭圆轨道上运动，只受微弱的摄动。在图33内，M_0表示流星体的初位置，M_0M_1是它在这椭圆上运行的一段弧。如果当木星离它很远的时候，它达到M_1点，那么它便继续在这椭圆上运行（图中以1表示）。

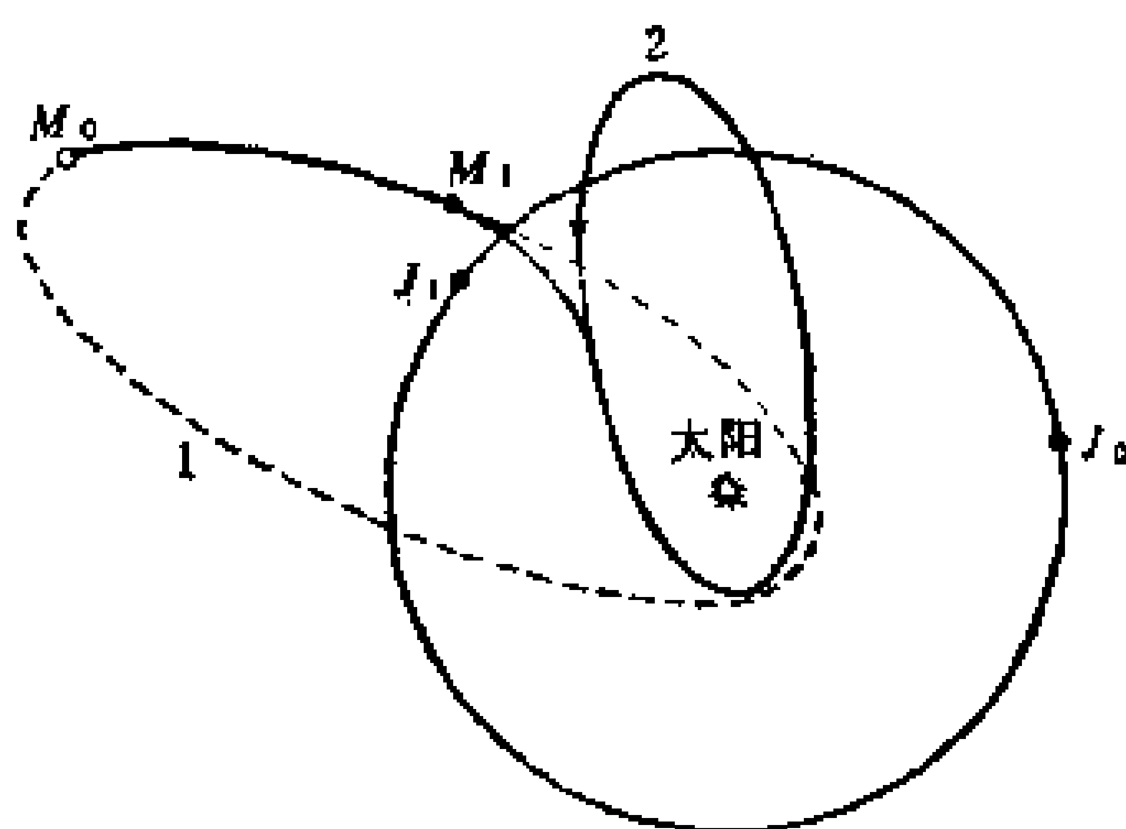


图 33 限制性三体运动问题的一例

但是，如果木星和流星体的初位置和初速度是选取这样一个时刻的值，此时它们相当接近，木星给予流星体的引力大到使这小天体偏离它原来的轨道。这一偏离的大小和性质，取决于最接近时刻的太阳、木星和流星体的相对位置，并取决于它们的速度的大小和方向；归根到底，一切都取决

于问题的初始条件。甚至木星对流星体所产生的摄动，使它的速度增加到这样一个程度，以致流星体M沿抛物线或双曲线轨道离太阳系而去，也是可能的。同时让我们假定流星体的速度这样变化，木星的影响使流星体运行在另一椭圆轨道上（图33内以2表示）。这个椭圆轨道与原来的一个大不相同。在这轨道里，再经过一个相等的时间，流星体会回到原来与木星相遇之处。如果M与J的轨道周期不等，第二次相遇便不会很快发生。可是迟早它们总会再度接近。于是流星体M的轨道又会受到很大的改变，它又会走上另外一个绝对不同的轨道，或进入抛物线或双曲线的轨道。

第一次相遇条件的微小变化，可以导致第二次相遇条件有很大的差异，即新轨道的大小和周期有很大的差异。这一差异将导致第三次相遇条件的更大变化；如果轨道是椭圆，那么必然产生这样的结果，依此类推下去。要是将每次相遇时可能出现的结果和它们初始条件的很微小的改变情况的差异都表达在一个普遍的方程式里，那么这方程式将令人难以置信地复杂。

木星在两次相遇之间当然会象正好相遇的时候一样地改变流星体的轨道，这更增加问题的复杂性。如果M有相当大的质量，那么M对于J的影响和使木星轨道相应地改变，就使问题更复杂化。由此可以窥见，三体问题在数学上的困难是由于在给定的M的初始位置和速度下，可能出现的运动的复杂性和很大的差异性所致。

1912年芬兰数学家森德曼（Sundmann）对于三体问题确实求出一个理论解。但是他所找到的数学方程式，复杂到不能用以计算这些天体在空间的位置，或推导出有关运动性质的任何结论，因此森德曼的方程式尚无实用价值。

总之，迄至目前，三体或多体运动问题还没有得到任何的完全的解。因此，我们用以研究太阳系里天体运动，是采用各种近似法。

11、天体运动理论中的逐步逼近法

天体运动的探讨主要用天体力学定量的方法。这些方法使我们能够对于某些天体的运动问题，求出这样一个近似解，使其与未知的确切解，在一段给定的时段内有尽量的密合。从定量天体力学得以建立天体的运动理论。使用这些理论，可以计算天体在空间里于某个周期的历程内的位置，探讨不同天体在一给定期间内的相互影响的性质，以及建立天体间相互摄动与它们的质量之间的关系，从而决定这些质量。总之，这种运动理论使人们能够从初始时刻开始，在一些特定的时间内，对于天体的运动作完满的描述。

有几种建立运动理论的具体方法。其中之一便是逐步逼近法，常用以研究行星运动的问题。

行星运动最显著的特征是，它们所运行的轨道与不受摄动的椭圆运动极其接近。这是由于太阳的质量比一切行星的质量大得多的缘故，这意味着每个行星受到太阳的引力远比受到其它行星的引力强大得多。现在试求太阳施于地球的引力比最大的行星（木星）施于地球的引力大多少。木星比地球距离太阳远五倍，地球与木星最接近时（大冲）的距离，约为四个日—地距离。因木星的质量约为太阳的质量的1/1,000，于是，大冲时它吸引地球之力约为太阳的引力的$1/4^2 \times 1,000 = 1/16,000$。木星在其轨道上的其它点时引力比

这数字还小，其它行星对于地球的引力更小得多。

同样，我们可以求得其它行星冲时的引力比太阳的引力弱若干倍。这些数字载于本节表3内。

表 3

	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	行星的质量（表示为太阳质量的分数）	行星对太阳的平均加速度
水星	—	300×10^3	800×10^3	24×10^6	154×10^3	2×10^6	60×10^6	100×10^6	$\frac{1}{6,023,600}$	3.7厘米/秒²
金星	15×10^7	—	53×10^3	9×10^6	40×10^3	540×10^3	17×10^6	36×10^6	$\frac{1}{408,523.5}$	1.2
地球	3×10^6	32×10^3	—	800×10^3	16×10^3	250×10^3	7.5×10^6	18×10^6	$\frac{1}{332,945.7}$	0.6
火星	4×10^6	120×10^3	43×10^3	—	6,500	105×10^3	3.5×10^6	14×10^6	$\frac{1}{3,098,710}$	0.26
木星	6×10^6	300×10^3	200×10^3	1.5×10^6	—	2,500	170×10^3	460×10^3	$\frac{1}{1,047,355}$	0.022
土星	7×10^6	350×10^3	240×10^3	2×10^6	200	—	25×10^3	88×10^3	$\frac{1}{3,498.5}$	0.006
天王星	7.5×10^6	400×10^3	260×10^3	2.4×10^6	500	900	—	7×10^3	$\frac{1}{22,869}$	0.0015
海王星	7.5×10^6	400×10^3	300×10^3	3×10^6	700	1,540	3×10^3	—	$\frac{1}{19,314}$	0.00067

表中还载有行星的质量（表为太阳质量的分数）和太阳施于每个行星的平均加速度等最新数据。

表内横行载太阳的引力对于某小行星的作用比其它行星在最接近时的引力强大的倍数。例如太阳对于地球的引力超过水星对于地球的引力300万倍，超过金星的引力的32,000倍，超过火星80万倍，超过木星16,000倍……。每一直列载

某一行星对它一行星（在大冲时）的影响。例如太阳给予水星的引力是给予木星的引力的154,000倍，其它行星的对应数字：金星40,000，地球16,000，火星6,500，土星200，天王星500，海王星700倍。

由此可见，支配太阳系里天体运动的主力是太阳的引力。行星相互吸引的作用比较太阳引力的作用相当微弱。这便说明为什么行星围绕太阳差不多在椭圆上运行，而对它们的椭圆轨道只有稍微的偏离（摄动）。

就是由于这个缘故，开普勒才能发现他的卓越定律。如果行星的质量大，从而彼此间的摄动影响强些，那么它们的轨道便会较大地偏离椭圆，开普勒便不会找到为大摄动所掩盖的定律了。

逐步逼近法便利用这样一个事实：行星差不多在无摄动的轨道上运行，因此用开普勒定律便能求得任何一瞬时，它在无摄动轨道上的近似位置。利用行星组态的近似知识可以计算行星的相互引力和任一瞬间行星得到的加速度。就是这些附加的加速度与太阳在行星上造成的加速度合在一起，便造成所谓**摄动加速度**。它们并不决定行星的轨道自身，而是决定对已知椭圆轨道的偏离。这些摄动加速度可以用来决定每一时刻的摄动。这些便是所谓**摄动的第一近似值**或**一级摄动**。它们的大小与摄动体的质量成正比例。

一级摄动并不与总的（精密的）行星摄动符合，因为摄动加速度只用来计算行星的近似位置。由于行星对于这些位置偏离小，由此一级摄动与精密摄动相差不多。

计入一级摄动，可以算出行星在空间每瞬时的新位置（即第一近似位置）。这些新的近似位置比在椭圆无摄运动方程式所算出的结果更加精密，因为对椭圆运动的偏离一般都

计算进去了。

使用行星在每瞬间的这种新的、更精确的新组态，还可能再计算这些时刻它们的相互吸引作用和行星的摄动加速度，然后再计算一次摄动。这样决定的摄动叫做**二级摄动**即**第二近似值**，自然比一级摄动更接近确切的数值。于是行星的位置比只考虑一级摄动所算出的位置更精确。同样，还可以计算第三、第四级等的摄动。

摄动体（行星）的质量比主吸引体（太阳）的质量愈小，为了得到一个一定精密结果所需要的级数便愈小。让我们讨论一个行星被另外一个行星的摄动。求第一近似值时，行星每一时刻的摄动加速度可以据下式算出：

$$\omega=\frac{m}{r_0^2}$$

式内m表示摄动体的质量（用太阳质量的分数表示），r_0表两行星之间的距离（据行星在无摄椭圆轨道上运行算出）。我们可以用这些摄动加速度去计算摄动的第一近似值，它们在大小上将和摄动体的质量m成正比例。将一级摄动计入之后，我们更可以求出每瞬时的行星间的距离的更精确的数值。将这些距离表为r_1；r_1与对应的r_0之差将与m正比，于是：

$$r_1=r_0+\Delta r_1;\quad \Delta r_1\sim m.$$

在第二近似值里，摄动加速度可以从以下的方程式算出：

$$\omega_2=\frac{m}{r_1^2}$$

在相同的一个时刻里，加速度ω_1和ω_2的差是怎样呢？要求出这一差值，我们取：

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{m}{r_0^2} - \frac{m}{(r_0 + \Delta r_1)^2}$$

$$= m\frac{2r_0\Delta r_1 + (\Delta r_1)^2}{r_0^2(r_0 + \Delta r_1)^2}$$

$$= m\Delta r_1 \frac{2r_0 + \Delta r_1}{r_0^2(r_0 + \Delta r_1)^2}$$

因为$\Delta r_1 \sim m$，所以$\omega_1 - \omega_2$之差与振动质量m的平方成正比例。用ω_2计算振动的第二近似值，可以求得每时刻的的新距离r_2。它们与r_1之差在大小上与振动质量m的平方成正比，即

$$r_2 = r_1 + \Delta r_2; \quad \Delta r_2 \sim m^2。$$

于是计算振动加速度的第三近似值：

$$\omega_3 = \frac{m}{r_2^2},$$

并可以写出差值

$$\omega_2 - \omega_3 = \frac{m}{r_1^2} - \frac{m}{(r_1 + \Delta r_2)^2},$$

$$= m\Delta r_2 \frac{2r_1 + \Delta r_2}{r_1^2(r_1 + \Delta r_2)^2},$$

我们知道，这差值与m的立方正比。第三近似值算出的两星的相互距离r_3与r_2之差，在大小上将与m^3正比，即

$$r_3 = r_2 + \Delta r_3; \quad \Delta r_3 \sim m^3 。$$

总起来看，由第一近似值能决定的行星位置，精度的量级与m正比，第二近似值精度的量级与m^2正比，第三近似值精度的量级与m^3正比等。m愈小，逐步求得的近似值的精度愈高，因而逐步逼近的行星的位置与行星的真实位置之差愈小。

以上讲过，行星的质量比太阳的质量小。质量最大的木星还不及太阳质量的千分之一。这便说明为什么使用逐步逼近法去研究行星的运动是很适宜的。我们现在对太阳——木星——土星三体问题作一点计算来说明这个问题。首先假设别的行星对于木星或土星都没有什么影响。

土星与木星围绕太阳的椭圆轨道接近正圆，其半径分别为15亿（1,500,000,000）公里和7.5亿（750,000,000）公里。木星和土星的周期分别为12年和30年。首先估计在它们相冲后三年期间土星受到木星的摄动和木星受到土星的摄动。为此，我们计算它们相冲时，这两个天体彼此给予的摄动加速度。据表3，在冲时太阳对于土星的引力作用比木星对于土星的引力作用约强200倍。因为加速度与引力正比，所以冲时木星给予土星的加速度是太阳给予土星的加速度的1/200。表3还给出由太阳的引力而来的土星的平均加速度为0.006厘米/秒²。因此木星在土星上所造成的摄动加速度（冲时）大约是：

$$\omega_J = \frac{0.006}{200} = 0.00003\text{厘米/秒}^2。$$

同样，我们计算土星给予木星的摄动加速度（冲时）ω_S；从表3得知土星吸引木星只有太阳吸引木星之力的1/2,500，而且由于太阳吸引木星的平均加速度为0.022厘米/秒²。于是求得：

$$\omega_S = \frac{0.022}{2500} = 0.000009\text{厘米/秒}^2。$$

在三年的时间内，木星在它的轨道上围绕太阳走了1/4周，土星走了1/10周（图34）。它们相冲三年后的位置在图中为J*与S*。从冲时起，木、土两星之间的距离不断增加，因而

摄动加速度不断减少。但是在这三年内，摄动加速度的方向变化不大；因而将这期间内两行星的摄动分别取为其极大值0.0003厘米/秒²和0.000009厘米/秒²，而且方向相同，是不致造成重大错误的。于是利用著名的匀加速度运动方程式：

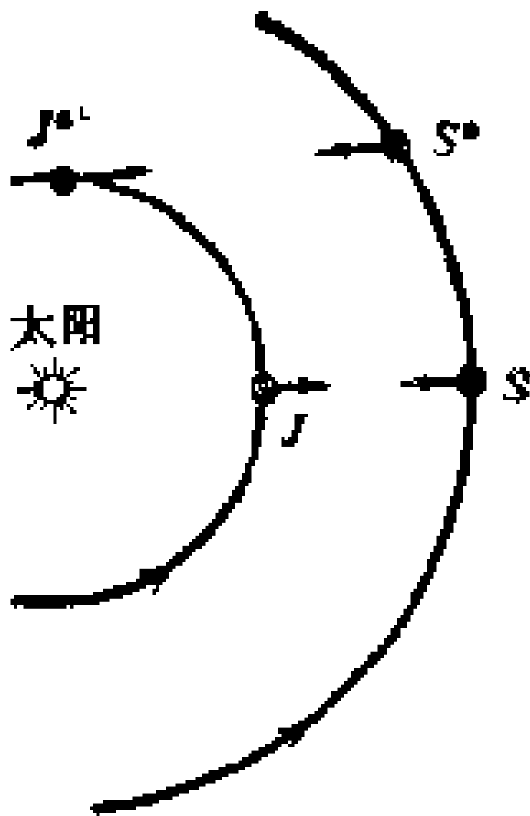


图 34　木星与土星的相互摄动

$$S = \frac{1}{2}\omega t^2$$

算出对于椭圆轨道的偏离，在任何情况下都会比真值大些。算出的土星和木星的偏离，以公里计，分别为：

$$S_{土} \approx 15 \times 10^{10}\text{厘米} = 1,500,000\text{公里},$$

$$S_{木} \approx 5 \times 10^{10}\text{厘米} = 500,000\text{公里}.$$

因此在三年的历程中，土星和木星偏离各自的椭圆轨道的距离分别不超过150万和50万公里。当然，这些距离不小，但是与它们和太阳之间的距离（15亿和7.5亿公里）比较都不算大。从地球上看木星和土星在空间里的这些偏离不超过3′（土星）与2′（木星）。

要得第一近似值，须先精密地计算木星和土星的摄动加速度，然后计算这三年内每一瞬间它们的摄动（在这些行星于真实椭圆轨道上运动的条件下）。但是我们将用另外一个比较简单的方法。

因为在这三年内土星和木星的总摄动分别不超过1,500,000和500,000公里，所以我们可以估计一级摄动与总摄动间之差的程度。事实上，木星和土星的确切位置与在计算摄动加速度的第一近似值的椭圆轨道上的位置之差，分别

不超过150万(1.5×10^6)公里与50万(0.5×10^6)公里，而它们之间的真实距离不超过计算里所用的$1.5+0.5=2$百万公里。

由于这两个行星的相互吸引作用所致的加速度随距离的平方反比而变化，因此

$$\frac{\omega}{\omega_1}=\frac{r_1^2}{r^2}$$

式内ω_1和r_1表示摄动加速度和两行星的距离的第一近似值；而ω和r表示它们的真摄动加速度和它们之间的距离。

应用比例的规则，上式可以写为：

$$\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}=\frac{r_1^2-r^2}{r^2}$$

因为r_1与r之差不能超过200万公里，而r不小于$15-7.5=7.5$亿公里，这比值不能超过1/180。换言之，就第一近似值言，摄动加速度的误差不会超过1/180。因此，根据这些加速度计算出的摄动，其第一近似值的误差不超过：

$$\frac{15\times10^5}{180}=8,300\text{公里(木星)}$$

$$\frac{5\times10^5}{180}=2,800\text{公里(土星)}。$$

这样，计入一级摄动后，我们可以决定木、土两星在给定的三年的时间内的位置，使其精度分别达到8,300公里和2,800公里。木、土两星轨道上这样小的偏离在地球上看还不超过1″。行星位置确定到这样的精度是足够满意的，不须再算二级摄动了。但是如果还要计算二级摄动，那便须先计算这两个行星计入一级摄动后的位置和摄动加速度，最后才求得摄动在每时刻第二近似值。因为现在木、土两星间的距离的误差不超过$2,800+8,300=11,100$公里，所以摄动加速

度的误差和二级摄动的误差不超过这些数字的1/35,000。在这情况下，计入二级摄动以后，木、土两星位置的误差分别将不超过：

$$\frac{15\times10^5}{35,000}\sim43\text{公里(木星)和}\frac{5\times10^5}{35,000}\sim14\text{公里(土星)}$$

象这样高的精度对于理论的实际应用上是不必要的。

摄动的表达式将依赖什么呢？空间里木、土两星在椭圆运动上的位置（这类型的运动是出发条件之一）由它们的椭圆轨道根数和时间决定；行星的相互摄动加速度与它们的质量成正比。因此，计算出来的一级、二级等近似的摄动加速度只依赖初始轨道根数、时间和土、木两星的质量。我们的运动理论的方程式便将木、土两星在空间里每瞬时的位置、初始轨道根数和它们的质量联系起来；这样，我们才能建立木星和土星的所谓**分析理论**。

逐步逼近法基本上就是这样；已经广泛而成功地用来建立太阳系里的行星和其它天体的运动理论。这是用以建立一切大行星运动的分析理论的步骤。

运动的分析理论之所以有用，不只是因为它们能计算天体的视位置，而且还因为使人得以研究行星与其它天体相互影响的性质，也可以用来计算它们的质量。

我们已经讲过（第6节），可以用开普勒第三定律大略计算有卫星的行星的质量。地球、火星、木星、土星、天王星和海王星的质量便是用这方法求得的。那么没有卫星的行星的质量，又怎样求得呢？方法是用这些行星的分析理论。

为了举例说明，试确定金星的质量。在假设金星的密度和地球的一样的基础上，由于金星的大小已经知道，因此可以计算它的质量的近似值。

当然，这个数字很不精确。可以利用金星对地球所造成的摄动，来改善这个数值。

我们已经知道，天体的相互摄动取决于它们的质量。先使用上述估计的金星的质量，去计算金星的引力对于地球运动所造成的摄动。我们再将计算得到的与由实际观测到的在地球运动上摄动加以比较；自然，须将其它大行星（特别是火、木、土三大行星）对于地球的摄动考虑进去。

由于金星的质量没有精密地测定，因此计算出来的摄动与观测到的摄动将有差异。通过改变金星的质量，可能选择出一个数值，使计算的摄动与观测的摄动之差达到最小。于是最后选定的结果是最接近于实际的金星质量。

确定水星和冥王星的质量要困难得多。这两个行星很小，对其他行星的运动所造成的摄动很弱。这便是为什么这两个行星的质量至今还了解得不完善的原因。

12、海王星的发现

天体力学最光辉的成就之一是海王星的发现。

自远古以来便认识五个大行星，即水星、金星、火星、木星和土星。

1781年英国天文学家威廉·赫歇耳(William Herschel)用他的望远镜环视天空时，注意到一颗在恒星间缓慢运动的暗星。赫歇耳以为它是一颗彗星。有许多人作了计算以后，才知道这个新天体围绕太阳运动，轨道差不多是正圆形，它距离太阳大约是土星的二倍。这是太阳系的一颗新的大行星，经人命名为天王星。

根据牛顿的引力定律对行星运动的理论研究，在天王星上遇到一个没有料到的困难。天王星不严格地遵循引力定律。计入已知行星所造成的摄动之后，天王星运动理论还不能精密地反映观测到的运动。天王星的计算位置有规则地偏离它的视位置。1830年偏离度达20″，1840年1′5，1844年约为2′。那时牛顿的定律已经固若金汤，以致只有少数天文学家认为这偏离是引力定律的失败。人们寻找其它原因，有人提出，这是由于天王星轨道外面还有一个行星，它在天王星运动上造成的附加摄动。在这猜度下，理论与观测上的差异便被解释为一个未知行星在天王星轨道上造成的摄动。

要用望远镜去寻觅这颗猜度中的行星，其困难之大，真如"海里捞针"，这就提出了确定这颗行星的运动问题，即从它在天王星运动上所造成的摄动去确定这颗行星的轨道。这问题只能用天王星运动的分析理论去解决，不仅将一切行星的扰动，而且还须将这颗未知行星的扰动影响一并考虑进去。我们曾在第11节内指出，在建立行星运动的分析理论中，我们可以得到给定行星的摄动与初始轨道根数（即施摄动于给定行星的其他行星的近似轨道）之间的关系。至此，问题是由已知行星的近似轨迹去求摄动。反之，这新问题是要用天王星的分析理论方程式，并根据在天王星的已知摄动，去求未知的施摄行星的轨道根数。

由于行星的分析理论的复杂性和未知行星造成的天王星摄动的微弱，而使这项工作包含极大的数学上的困难；但是这项工作差不多同时为英国天文学家亚当斯（Adams）在1843～1845年和法国天文学家勒威耶(Leverrier）在1845～1846年所完成。在这颗行星的轨道根数求出以后，便可能推导出它在天空的视路径和它在任何时刻的位置。在1846年9

月23日柏林天文台的加勒（Galle）根据勒威耶的数据，将他的望远镜对准这未知的行星应当出现之处。在勒威耶预测之点附近1°处，加勒果真观测到一颗有小小的行星圆轮的新天体。几天后，便发现它在恒星间运动。就是这颗新的大行星，后来被命名为海王星。

海王星是用纸和笔发现，是牛顿引力定律的正确性的一个新的极有说服力的证明。

13、周期摄动和长期摄动

为观测所证实的行星运动的分析，有两类摄动即**周期摄动**与**长期摄动**。前者是周期性地重复着在椭圆运动的两侧反复摆动，即其轨道根数在某个平均值两侧起伏变化。后者的特征是对无摄运动的偏离不断上升，即根数的大小不断减小或加大。

周期摄动的起源可以解释为：行星的组态，因而摄动加速度的大小和方向的变化相当迅速而且有周期性，其结果便是一行星先在一个方向加速一行星，继在另一个方向上加速。

为说明这点，我们试看木星对地球所造成的摄动加速度，在一年的历程内如何变化。在这期间，地球在轨道上运行了一周，而木星围绕太阳只运行1/12周。图35内的箭头表示每三个月内木星对于地球的摄动加速度的方向。由图可见，在位置2时，地球的轨道速度显然由于木星的引力而减少，而半年后在位置4时木星的引力又使地球运动的速度增加。结果造成地球的周期为一年的摄动。除了这些周期性的

年摄动之外，还有其他摄动。例如图35表示一年内木星的引力使地球向木星移动。现在再看地球的年位移的方向怎样在木星的12年轨道周期里变化。

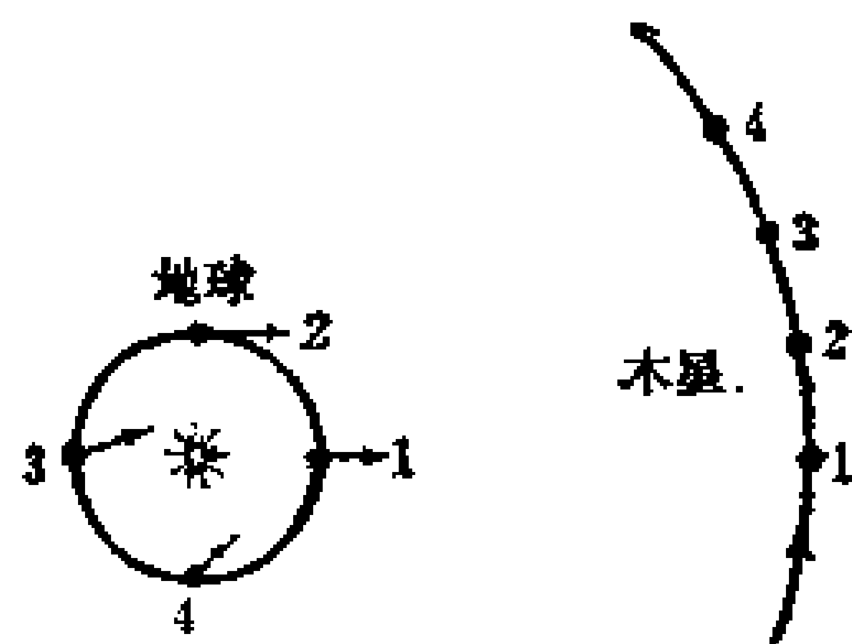


图 35 一年内木星给予地球的周期摄动

图36内设箭头表示由于在木星的12年周期里的每一年内，地球由于木星所致的年位移的方向。我们知道，在12年内这些箭头转动了360°，这意味着在个（一个方向)上的每个年位移30°，在6

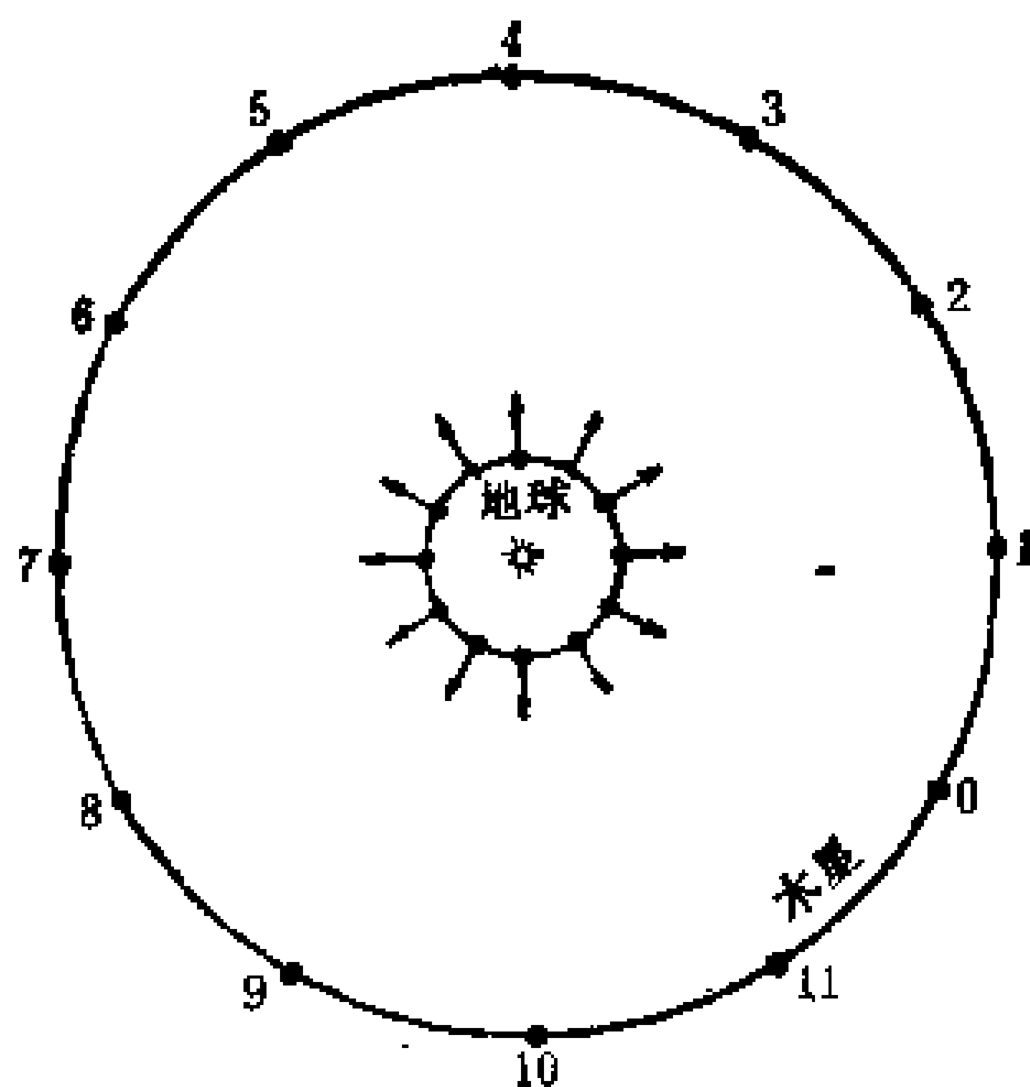


图 36 木星给予地球的12年一周的周期摄动

年后相当于相反的方向上的位移。这一类摄动周期为12年。这样，我们发现了由于木星的引力所致的对无摄运动的地球，使之偏离的1年和12年的周期摆动两种效果。

行星的周期摄动一般相当小，并不能导致它们的运动的

改变。由于周期摄动所致的相应椭圆运动位置的天球上的极大视偏离是：水星约15″，金星30″，地球1′，火星2′，天王星3′，海王星1′.5。只有木星和土星这些偏离才达到可观大小：分别为28′和48′。这些摄动的周期也长，大约是900年。

具有这样长的周期的摄动叫做**长周期摄动**。它们处在周期"群摄动"与长期摄动之间的界线位置。我们往往不能由观测直接区分这两种摄动，因为如果观测时间远比长周期摄动的周期短时，那就很容易将长周期摄动误认为是具有偏离继续不断增长性质的长期摄动。例如18世纪记录了木星和土星的平均轨道速度的一个很缓慢的变化，但是因为这些变化的周期长达900年，所以只凭观测不足以判断这些摄动是周期的还是长期的。它们的周期性是由理论确定的，而从观测证实，这些摄动真如理论预测那样发生。那么是什么因素造成这些行星的长周期摄动呢？

木、土两星围绕太阳运行的轨道周期已知大约是12和30年，因此这两个周期之比接近2/5，即：土星在轨道上运行两周，同时木星在它的轨道上大约运行了五周。这样两种周期叫做**可公度**的。

公度性可以说明类似力学上称为共振的现象。共振发生于附加的周期力作用在与它调谐的振动体上。即使这附加力很小，也可以逐渐造成可观的振幅。

土星环绕太阳的运动，可以看做是一个围绕太阳30年一周的振动。土星在轨道上每运行两周以后，它、木星和太阳重现60年前的组态，因此木星对土星的摄动作有规则地重演。换句话说，木星施于土星的摄动作用是周期性的，这周期是土星的轨道周期的两倍。

总之，土星相对于太阳作周期性的振动，并受到一个周

期摄动力（即木星引起的摄动）的作用而共振。土星对木星的扰动影响也是一样。结果便导致共振的情况。这便说明为什么由它们周期的可公度性联系起来的木星和土星的相互摄动这样大。

周期摄动以外，还发现有长期摄动。这种摄动迫使行星愈来愈远离其无摄的路程。行星运动的分析理论里含有与时间甚至与时间的平方和立方成正比而变化这样的摄动。可是这些摄动增长很慢。例如，根据勒威耶所建立的地球、金星和木星的运动理论，这些行星的轨道偏心率含有下列公式所表达的长期摄动：

$$e = 0.0167498 - 0.0000426t - 0.000000137t^2 \quad （地球）$$

$$e = 0.00681636 - 0.00005384t + 0.000000126t^2 （金星）$$

$$e = 0.04833475 + 0.000164180t - 0.000000468t^2 （木星）$$

在这些公式里，t以世纪为单位计算，从1900年算起。可以看到，一年内这些行星的偏心率只分别改变了0.0000004，0.00000054，0.000001641；而且在100年内也只分别改变了0.0000427，0.0000537，0.00016371。

可是，这种作用经过长时间的摄动，可以导致行星运动的根本改变。例如，如果经过10000年，那么地球轨道的偏心率当减少0.0134，金星减少0.0014，而木星则应当增加0.064。

但是我们不能无视于这样一个事实：行星运动的分析理论，只能对于一定的时间内，才能以足够的精度表达行星的实际运动；这段时间以外，这些理论便失效了。遗憾的只有少数几个特例才能在理论上指出理论与给定天体的运动问题的严密解之间充分符合的时段。

我们一般将建立的某个天体的运动理论与一切有效的观

测加以比较。这自然可能出现理论与观测之间的偏离。这些偏离的大小和比较所包含的时段使人可以判断理论误差。

行星运动的现代分析理论与1800年至今的观测数据比较，表现的差异在几弧秒之内。因此我们可以推断，现今的行星运动理论可以适用于100～200年间的计算，使我们可以预测这期间行星在天空的位置，精确到几弧秒。这期间内，行星的轨道根数将按这些理论的方程式而变化，但是不知道将来是否这样变化。不过，使用这些方程式去研究行星在几千年历程内的运动无论如何是没有问题的。举例来说，试用以上的方程式计算今后20,000年的金星轨道的偏心率，e会是负数。然而这是不可能有的，因为e只能是正数或零。可见我们不能使用这个方程式去预先计算几万年的金星轨道的偏心率。

结论是：行星运动的分析理论不适用于纯粹长期摄动的研究，但是天体力学已经制订出其他方法，它们不是设计来推算天体确切位置，而是专门用于探讨长期摄动。这些方法的应用表明，行星运动的分析理论看做是长期的某些摄动，其实是长周期类型的。行星轨道的偏心率和交角的变化便是这样。行星的相互引力周期性地改变轨道的形状及其对于黄道的交角。看来这种偏心率和交角的摄动象是一组周期不同而很长(达到万年量级)的振动。这一类摄动不是有规律地周期性的，而是带有很慢很慢的振动性质的。

长期摄动的理论表明，行星轨道的偏心率和交角的变化并不正好是长期摄动。但是，因为这些变化周期长达几万乃至几十万年，所以文献上保留了“长期的”这个词。

例如，表4列出了勒威耶计算的1850年前、后各十万年火星和地球的两个变动轨道根数（偏心率和交角）的长期变

化的平均值（忽略短周期摆动）。轨道交角是相对于1850年地球运动的轨道面计算的。

根据表4内的数字，将这两个根数的变化趋势绘于图37与图38内。

表 4

t	火星		地球	
单位千年	e	i	e	i
−100	0.1079	3°13′45″	0.0473	3°45′31″
90	0.1195	2°55′36″	0.0452	2°42′19″
80	0.1251	1°55′12″	0.0398	1°18′58″
70	0.1225	30′01″	0.0316	1°13′58″
60	0.1175	1°01′41″	0.0218	2°36′42″
50	0.0978	2°09′32″	0.0131	3°40′11″
40	0.0832	2°46′15″	0.0109	4°03′01″
30	0.0746	2°54′43″	0.0151	3°41′51″
20	0.0840	2°46′37″	0.0188	2°44′12″
− 10	0.0884	2°27′51″	0.0187	1°24′35″
0①	0.0932	1°51′06″	0.0168	0°00′00″
+ 10	0.1006	49′17″	0.0115	1°14′26″
20	0.1036	53′49″	0.0047	2°07′46″
30	0.1013	2°29′09″	0.0059	2°33′19″
40	0.0945	3°49′17″	0.0124	2°27′53″
50	0.0857	4°27′27″	0.0173	1°51′54″
60	0.0797	4°10′49″	0.0199	51′52″
70	0.0825	3°05′11″	0.0211	34′35″
80	0.0948	1°46′11″	0.0188	1°45′40″
90	0.1113	1°55′26″	0.0176	2°40′56″
+100	0.1258	49′45″	0.0189	3°02′57″

① 将1850年取为初时刻 t = 0。

由表和图可见地球轨道的偏心率在零（正圆轨道）与0.069之间摆动，而轨道交角可以增加到4°41′。

表 5

	e		i 极大值
	极 小 值	极 大 值	
水 星	0.121	0.232	9°17′
金 星	0	0.071	5°18′
地 球	0	0.069	4°41′
火 星	0.018	0.140	7°09′
木 星	0.025	0.061	2°01′
土 星	0.012	0.084	2°33′
天王星	0.012	0.078	2°33′

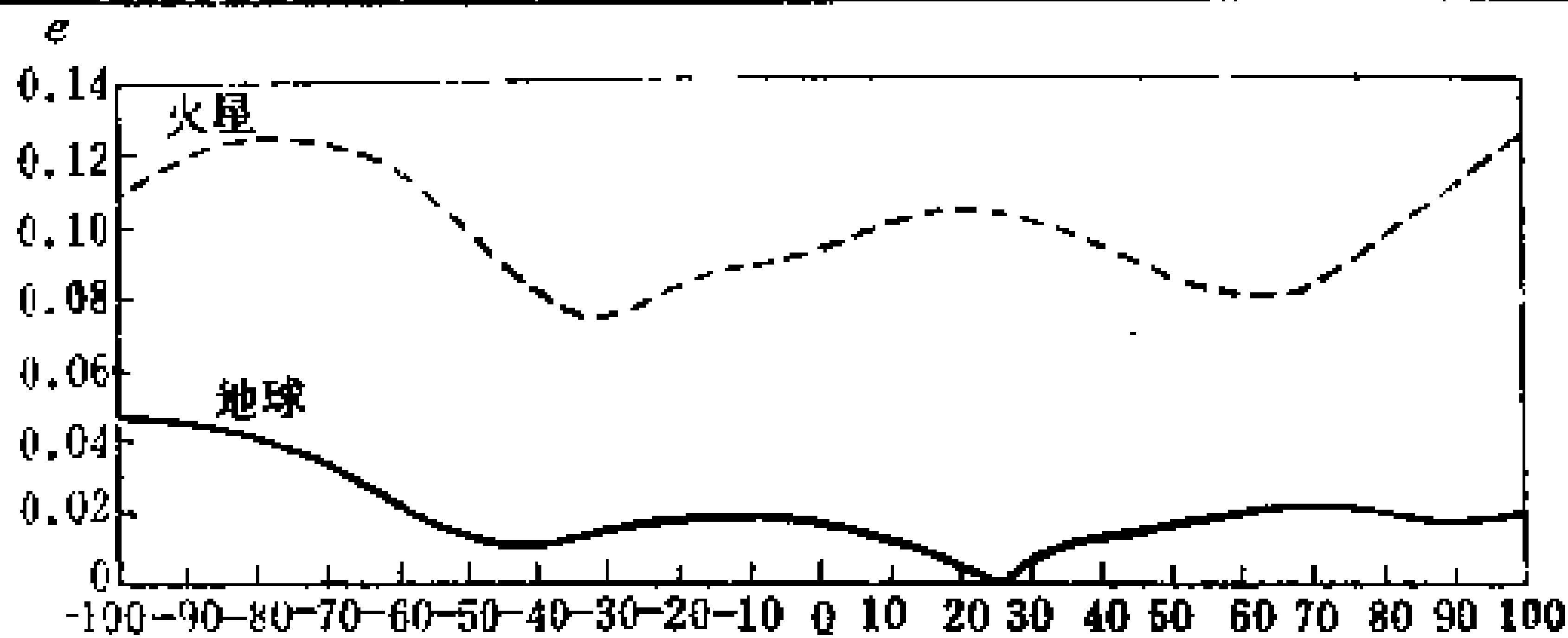


图 37 地球和火星的轨道偏心率在200,000年内的变化

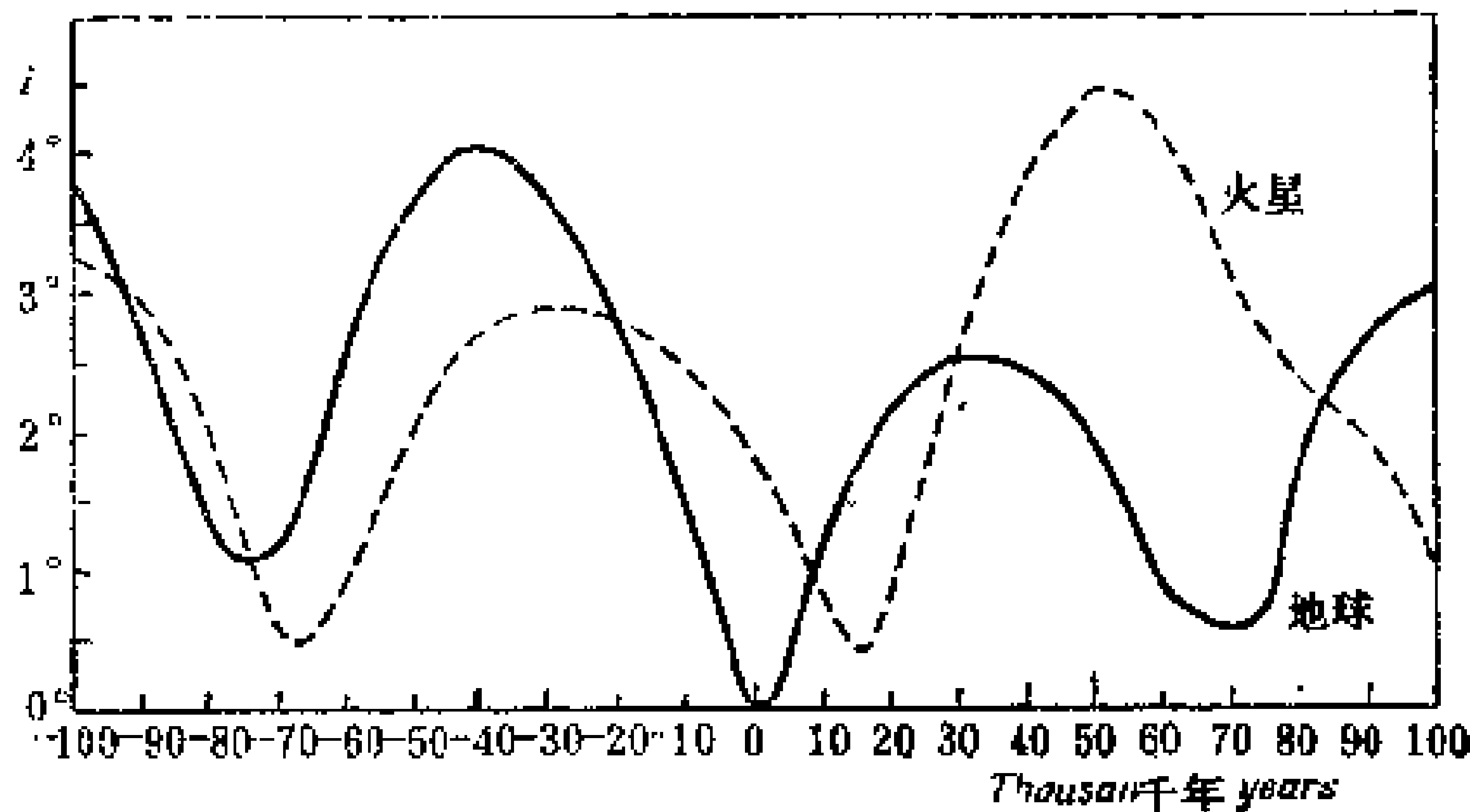


图 38 地球和火星的轨道交角（对于1850年地球的轨道面）在200,000年内的变化

勒威耶也对其他行星计算过这样的表。表5载大行星的轨道的偏心率的极大值和极小值以及轨道交角（对于1850年地球轨道平面的）的极大值。

行星轨道的偏心率和交角的“长期”摄动，导致行星在天上的视位置显著的变化。对于金星，由于偏心率增加到 $e=0.071$ 所致的视位置变化可以达7至8°；而对于火星，由于交角的增加所致的视位置的变化至少5°。

可是这些摄动还没有大到足以改变行星运动的类型。它们的轨道仍然接近正圆，而且轨道面的相互交角仍然是相当小。

有时由于偏心率、交角，特别是轨道半长轴的长期改变，而造成行星运动的根本变化。例如，半长轴的长期增加，意味着一切行星将逐渐离开太阳而去。

可是，不论是理论探讨或是观测都没有发现轨道根数里有真正长期的变化。当然，行星轨道的半长轴、偏心率和交角并不保持不变。它们都有微小的周期性的起伏；可是在几十万年的历程内，半长轴没有不断的增长或减短。换句话说，在以后很长、很长的时期内，行星的运动将和现今一样运动。

行星的轨道根数中只有两个——升交点的黄经和近交距角是有长期变化的。一切行星轨道的升交点都“退行”，即其运动的方向和行星在轨道上运动的方向相反。反之，大多数行星的近日点有与行星运动方向相同的“运动”。但这些运动是很缓慢的。运动“最速的”是土星轨道的拱线。它运行一周只需57,000年。木星近日点的运动速度只有这速度的1/6，运行一周，需时349,000年。

14、天体力学的数值方法

研究行星和其他天体的运动，除分析法外，目前还广泛使用数值计算法。数值法与分析法的差别在于我们不是利用它来将摄动表示为时间的函数的方程式而只是求表示天体于某一确定时刻在空间位置的数字（即坐标）。那么，这些位置是怎样求的呢？

设想有几个天体按牛顿定律互相吸引。如果我们知道每一天体在初始时刻t_0的位置和速度，那便可以确定在初时刻这些天体间相互作用的引力以及它们互相给予的加速度。现在选择初时刻附近的另一时刻t_1，而且设在$\Delta t = t_1 - t_0$一段短时间内，天体的加速度不变。于是用匀加速运动的方程式我们可以计算在Δt内对于匀速直线运动的偏离以及在t_1瞬时天体的位置和速度。由这些天体的新位置，又可以计算在瞬时t_1它们之间的作用力和在时刻t_1的加速度；于是可能再确定以后另一瞬时t_2附近天体的位置和速度。如此类推下去。

因此可以逐步逼近法计算天体在空间的近似位置，并编制一张表以表示这些天体在t_1、t_2、t_3……等时刻的位置。这便是对于这个时段的数值理论的方法。

天体在轨道上的继续位置的计算是相当简单的，只需要使用算术四则运算。可是为推导出或长或短一段可估计的时间内（10至20年）的运动而必须进行的运算次数之多是惊人的。这便是为什么数值计算法只在近三十年内电子计算机发明以后，才为人们大量使用。

1951年美国刊布了太阳系四个最大的行星（木星、土

星、天王星与海王星）的运行表。这些使用电子计算机编制的表载有这些行星在1653～2060年间每隔40日的位置。将1780～1943年间对这些行星的观测与它们的运动的数值理论作比较，表明这种理论比美国天文学家希尔(Hill)和纽科姆(Newcomb)所创造的最精细的分析理论更好地与观测吻合。数值理论使我们以与由观测确定的行星的位置相同的精度来表述这些行星的视运动。就平均情况言，数值行星理论与观测数据之间的偏差不超过一弧秒。

数值计算法现在正有效地用以研究小行星和卫星的运动及用以解决天体力学的其它问题。一般说来，这些方法使我们能以比用分析法高得多的精度预测天体的视位置。更有甚者，最复杂的问题可以化为简单的计算；而不会出现基本的数学困难。用数值法计算三体和四体问题与两体问题一样容易——只是计算的次数增加罢了。这些便是数值计算法的最大优点。它有什么缺点呢？

与分析法相同，运动的数值理论只能用于一个特定的短时段内。原则上讲，计算可以推广到无论怎样长的时段去。但是不仅从实际上看要建立一般长时间（如今后十万年）的天体运动的数值理论太困难，而且还有理论中的误差问题。这是当然的，因为我们只是求得这个运动问题的一个近似解。而要确定远离初始时刻（如许多千年）的时间点的误差，或要确定在这时刻（如数值解所指出的）一个给定天体的位置与由这个运动问题的精确解给出的位置之间的差值范围，是很困难的，而且在许多情况下甚至是不可能的。

即使在开始计算的时候，我们便需要确切知道所讨论的天体的质量，还必须有这些天体的引力的全部数据。另外，在数值计算中，我们直接得到这些天体的摄动，而不是这些

摄动与表述摄动体及其运动的质量、轨道根数和其它性质的量之间的关系(如在运用分析方法的情况那样)。如果我们不掌握我们使用的运动理论方法，那么至今我们还会对金星或水星的质量一无所知，更谈不上“从理论上”去发现海王星了。单纯使用数值方法，我们便不能由研究得出天体运动的一般性质。

总之，我们可以说，运动的数值方法和数值理论（如象它们目前这个状况）远不是全能的，而且也不能完全代替天体运动的分析方法与分析理论。可是现在它们的实用价值是很大的，而且随它将来的精密化和所用的计算机的改进，数值方法的作用和意义将逐步增加。已经有一些将数值方法与分析方法结合起来的论文发表。通过数值方法与分析方法的联合使用，天体力学无疑将可期望出现相当大的进步。

15、卫星的理论

卫星围绕它们的行星运动与行星围绕太阳运动极其相似。一颗给定行星的卫星的运动基本上为这行星的引力所支配。如果这行星（如木星或土星）有几个卫星，那么便要将它们之间的相互作用考虑进去。这些摄动一般都微弱，因为卫星的质量比行星的质量小。卫星的运动也受到太阳系里其它天体的扰乱。

现在比较太阳和木星对于土星的卫星的摄动作用。

在最接近时，木星与土星的距离大约是太阳与土星的距离的二分之一。但是太阳的质量是木星的1000倍，因此太阳吸引土星的卫星之力是木星之力的$1000/2^2=250$倍。其它行

星对于土卫的摄动作用还要更弱。因此，在卫星的理论内，一般只计入太阳的摄动影响，而不管其它行星的引力。另外，由于卫星距离本行星不远，因此我们必需考虑行星不恰是球形这个事实，因而行星对于它的卫星的引力不是恰好按距离平方反比而变化。

卫星相互摄动的研究，使我们可以确定它们的质量。四个大的木卫和四个土卫的质量便是这样确定的。土星和木星的其它卫星以及天王星和火星的卫星的相互影响，却没有探测出来。它们的质量只能由它们的大小和可能的密度去判断。

卫星运动的理论使我们得以区别由于行星不是球形而造成的影响。这种影响依赖于行星的扁率，因此观测到的摄动使我们得以估计出这种扁率（所谓动力学扁率）。但是，卫星的运动不只决定于行星的几何形状，而且还决定于行星物质的密度分布规律（而这是不知道的）。这便是行星的动力学扁率的估计不完全可靠的缘故。

由于土星有光环，它的卫星系和其它行星的卫星系不同。土星光环是一大群微型卫星所构成的，它们差不多在同一平面内运动，而且彼此相当接近，以致在远处看去，给人的印象是一个固态薄环。

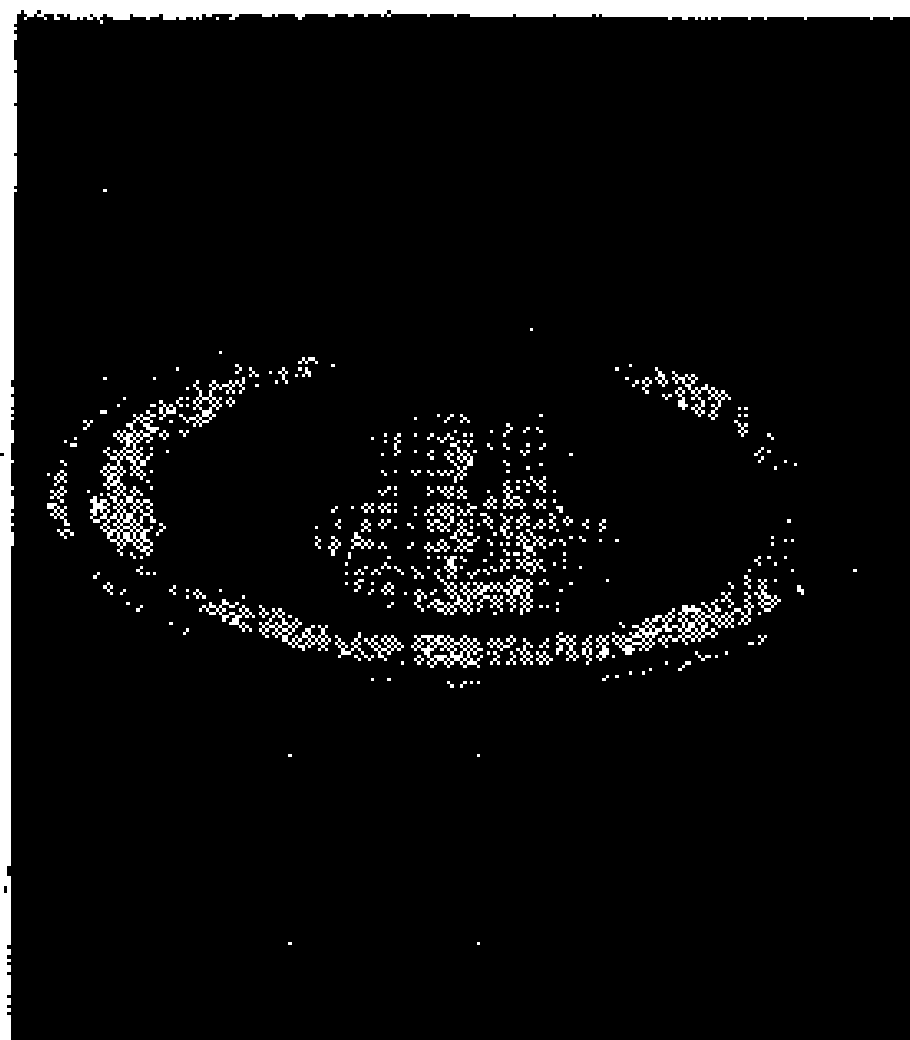


图 39　土星和它的光环

在建立土卫运动的理论中，必须考虑光环的引力。观测得到的土卫上的摄动帮

助我们确定光环的质量约为土星质量的1/27,000。

地球的卫星（月球）的运动是天体力学上一个最复杂的问题。其原因如下：

1. 月球是最接近地球的天体。月球运动上有细微不规则情况都可探测出来。月球在空间的位置只移动两公里，便使它在天空的视位置改变1″。这便要求由理论预测月球位置的精度至少达到这样高。即理论必须能将月球在空间的位置确定到两公里之内，或甚至更高的精度。●

行星和小行星的位置可以确定到小得多的精度。例如为了预推木星在天空的视位置在1″之内，只要知道它在空间的位置精密到3000公里就够了。

2. 地球和月球相当接近太阳，因而太阳给予月球的摄动很大。试计算太阳的摄动比支配月球运动的地球的引力弱多少倍。

这里我们必须弄明白，太阳的摄动力并不是太阳给予月球的吸引力。月球围绕地球运动，因此太阳吸引月球与地球的总力，并不在地月两体的相互位置上造成任何改变。月球相对于地球位置的改变取决于：1）地球的吸引力（主力）；和2）太阳吸引月球比太阳吸引地球的力强弱的变化，即太阳施于地球与施于月球的引力之差。新月（即月球最接近太阳）时，这两种力的差即地球施于月球的之力之比为1/89；这意味着这种摄动性的吸引有时并不比主力小得很多。对于其它卫星，主力与太阳的摄动力之比要小很多倍。

地球给予月球的加速度为0.27厘米/秒^2。由于太阳的摄

● 要预测日食初亏时刻精度达1秒，便需要知道月球在天空的位置不差0″.5。

动吸引所导致的月球的摄动加速度只及地球给予月球的加速度的1/89，因而等于0.27/89≐0.003厘米/秒²。应用方程式$S=\frac{1}{2}at^2$，求得仅在三天内（在这期间内摄动加速度在改变，但是改变很少），月球离开它的无摄路径竟达1000公里之远，而其视位置大约改变了4′。而且这只是三天之内，须知土星和木星的摄动，三年内还不超过3′呢！

3．地球的形状不是正球而是扁球。使用类球体的引力方程式，可以计算由于扁率所致的摄动力不超过地球对月球的引力的1/1,000,000。可是，在月球运动理论中，这个力也是必须计算进去的。

总之，一方面月球受到由各种来源（由于太阳、行星和地球的扁率所致的摄动）的较强的摄动；另一方面这些摄动又须计算到很高的精度，比其它天体所受的摄动所需要的精度要高很多。这便是使月球运动理论的问题如此复杂的缘故。

自牛顿、达朗贝尔和欧拉以来，许多天文学家和数学家在牛顿引力定律的基础上建立月球运动的理论。目前使用的是美国天文学家布朗(E.W.Brown)于1895年所创造的理论。据这理论算出的月亮在天空的视位置误差不超过0″.5～1″。为了使读者对月球运动理论的复杂性和制订这种理论必须用的精确性有个概念，我们可以指出，确定月亮在天空的位置的某些方程式一共含有几百项。这些项都是表示周期摄动的。其中大多数不超过0″.1，相当于月球在空间的位置只有200米的变化。

16、 太阳系的人造天体

当前天体力学所从事的研究，不仅是太阳系中的自然天体——行星和它的卫星、小行星、彗星的运动，而且还有人造天体的运动。它们就是：人造地球卫星、送往其它行星和月球的自动行星际站、载人宇宙飞船以及月球的或行星的人造卫星。

1957年10月4日，苏联发射了第一颗人造地球卫星，接着在1957年11月3日发射第二颗；随后在1958年5月15日又发射第三颗。1959年1月2日，苏联发射了宇宙火箭，它飞过月球附近；离开地球是这样远，以致超出地球引力极限，因而象太阳系行星那样绕太阳运动，成为太阳系第一颗人造小行星。

在1958～1959年间，美国发射了第一颗人造地球卫星。迄今世界各国发射的人造天体总数已经超过11,192颗●。在天体力学这门学科面前开辟了新的、非常丰富的活动领域，产生了天体力学新的分支——人造天体运动理论。文献中给它不同的名称："天体动力学"、"宇宙动力学"、"宇航理论"、"天体弹道学"。而我们采用"天体动力学"一名。

人造天体的发射，目前是借助多级火箭来进行的，它的最后一级载有发射对象。这可以是大小不等的装置科学仪器的容器，也可以是载有宇航员的整艘宇宙飞船（众所周知，人类

● 截止到1978年12月31日。

历史上最早的载人宇宙飞船是苏联于1961年4月12日和8月6日发射的）。在火箭起飞后一定时间内，它是依靠发动机产生的推力而运动的。这就是火箭轨迹的主动段；在这一段，我们还不能将它看作人造天体，而只能将它看作喷气飞行器。

起初火箭竖直上升，以便能较快地穿过最稠密的大气层。随后，它逐渐从竖直方向转到水平方向，并达到很大速度。在水平运动的情况下，速度增到最终值所需要的能量最小，因而火箭燃料消耗也最少。这是因为：在这种运动情况下，地球引力对火箭速度没有什么影响，这时引力方向几乎与运动方向垂直。如果火箭在全部工作时间的运动方向都保持竖直，那么，发动机能量消耗就不仅要花在增加火箭速度上，而且要花在克服地球引力上；在这种情况下，引力方向与运动方向相反，从而阻碍火箭的运动。

在火箭最后一级发动机燃料耗尽，停止工作的时候，轨迹的主动段就结束了。这时发射对象自动与火箭分离，并开始在引力作用下沿一定的轨道环绕地球运动。这个瞬间称为宇宙飞行器进入轨道时刻。往后它的运动基本上（有时是完全地）被动的，也就是无控制的；它依靠在主动段获得的能量而运动。宇宙飞行器变成人造天体，它的运动大体上可以与自然天体一样进行研究。但是，如果在经典天体力学中，几乎只考虑天体之间的相互引力，那么，在天体动力学中，无论如何就不能仅局限于这种力了。必须考虑地球大气的影响。人造卫星的运动越接近地表，大气阻力就越大。太阳辐射压力对人造地球卫星的运动也往往起重要作用。此外，目前很多宇宙飞行器的发射，都是借助于装在火箭发动机上的装置来控制的。载人宇宙飞船却必定是可控的。这

样，它的运动就不完全被动。可以利用喷气发动机来改变在运动过程中的宇宙飞行器的轨道。虽然，发动机的动力远比自然力的总和为小。由于这一切原因，使天体动力学问题变得很复杂。经典天体力学在这方面的不足，使得所建立的方法和结果受到局限。

在天体力学中出现了许多新问题，例如经典天体力学仅仅研究已有的天体的运动，而在天体动力学中还要研究所谓轨道设计的问题。为了某个目的面进行的一系列人造天体的发射，都是要求它按照预先设计的轨道运动。比如说：在发射人造地球卫星的时候，可以要求它按圆轨道环绕地球运动，在发射行星际站的时候，则可以提出诸如在三个月内到达金星等要求。在所有的情况下，应该预先设计轨道，并预定该怎样发射宇宙飞行器，怎样控制它，使它按所设计的轨道飞行。

在天体动力学中还出现由一条轨道过渡到另一条更适合的轨道问题。为此，就利用装在宇宙飞行器上的喷气发动机，它可以按地球上的指令而开动。这种发动机按规定的期限和时刻开动，并给飞行器以必需的附加的速度。结果宇宙飞行器此后就开始沿新的轨道运动。

发动机只能开动很短时间。这时飞行器受到的作用，几乎是瞬时的推动（冲量）。但是，一般说来，喷气发动机能长时间工作。这时它持续产生附加推力。具有经常的附加推力的宇宙飞行器的运动问题，目前正在大力研究中。能在长时间内产生附加推力，即使是不大的飞行器发动机，目前也还仅仅在计划中。

用这种方法改变轨道，可以力求校正较小、或力求在圆形轨道上转移的宇宙飞行器。这时产生的数学问题在于：预

先规定何时应当给宇宙飞行器以附加冲量；也在于：按理想的方式改变它的轨道。这个问题的复杂性就在于按最优方式从一条轨道转移到另一轨道。就是说：附加的冲量应该功率较小（需要的燃料较少），同时，宇宙飞行器过渡到新轨道所需的时间较短。

令人感兴趣的是：宇宙飞行器回归地球（考虑地球大气阻力），或在月球、或行星上着陆的问题。要求宇宙飞行器从绕地球轨道或从飞往月球和行星的轨道，转移到着陆轨道，使宇宙飞行器沿着它平稳降落在地球、月球或行星表面上。首要的问题是在别的天体上软着陆，这已经在1966年2月3日，由苏联发射的行星际站《月球-9》在月球表面降落而得到解决。

由一个轨道转移到其它轨道的课题与宇宙飞行器的结构和自动控制的工程技术问题密切相关。具体实施需要天体力学家和各种专业的工程师参加。实现这种转移的卓越例子是宇宙飞行器转移到绕月球和行星的卫星轨道上去。

天体动力学不仅提出新问题，而且，使人们不得不重新修改经典天体力学处理自然天体的一系列"老"问题。例如，要准确地计算飞往其它行星，就不能没有关于行星运动本身的准确资料。现有的行星运动理论的准确性在许多情况下是不够的。此外，在关于人造天体运动的问题中，需要知道天体之间的准确距离和它们的大小，也就是说，要求天文学中重新审订所谓的基本和辅助的天文常数，即重新审订确定地球大小和形状、地球自转、地球绕日周期以及地球、一切行星、月球、太阳之间的质量比和它们的引力常数等参量数值。为了能按运动理论将太阳系天体任一时刻在空间的位置精确计算到米、公里，对这一切参量的认识是必需的。

1964年，国际天文协会通过新的天文常数系统（代替1896年通过的旧系统）。1976年，该会又通过了若干更改❶。

作为时间单位，采用所谓"原子历书时"，等于86400历书秒。历书秒按原子时标计算。原子时的"秒"长定义是：铯—133原子基态的两个超精细能级间在零磁场上跃迁辐射9,192,631,770周所持续时间。原子时的计量是使原子历书日在1900年1月1日与平太阳日重合❷。对这样的时间单位，地球在1900年7月1日的自转角速度等于$7.2921151467\times10^{-5}$弧度/秒，相应的地球自转周期为23时56分4.0982秒，同样，取昼夜的长期增加为每世纪（36525日）0.00164秒，地球绕太阳周期在1900年1月1日等于365.2563604日，而每世纪的长期增加为0.00000011日。行星质量采用值见表3。

所采用的一些天文常数值如下：

一天文单位	149597870公里，
地球赤道半径	6378.140公里，
地球极半径	6356.755公里，
地球扁率	1/298.257＝0.00335278，
地心引力常数（引力常数乘地球质量）	3.986005×10^{14}米^3/秒$^{-2}$，
地、月质量比	$0.01230002=\frac{1}{81.30068}$，
日、地质量比	332945.7，
地球质量	5.9742×10^{24}公斤。

---

❶ 详细可参见《中国大百科全书—天文学》"天文常数系统"词目。——译者注

❷ 应在1958年1月1日0时（U·T），见《中国大百科全书—天文学》"原子时"词目。——译者注

新的天文常数值是将地球、月球、其它行星以及人造天体运动的大量观测资料与理论分析和数值方法结合起来进行研究而得到的，同时也吸收由地质学研究得出的地球形状以及由重力测量学研究得出的地球表面重力分布的结果。对于这些天文常数还远不够完善，因而并非绝对精确。例如：计算出来的地、月质量比判定在$\frac{1}{81.29}$至$\frac{1}{81.31}$范围内，而地球赤道半径在6378080至6378249米的范围，因而所得到的天文单位（以公里计），有几百公里的可能误差；也有些常数具有较高的准确度，例如：章动常数采用9″.20，可几误差为0″.01。

在转向人造天体运动问题较详细的叙述前，让我们先以一级近似来考察人造地球卫星的运动。

17、人造地球卫星的无摄动运动

设在某个时刻t_0人造卫星进入轨道，它处在轨道上P点（图40），在地球表面以上高为h_0（与地心距离为r_0）。其垂直于向径OP的水平速度为：

$$v_k = \sqrt{\frac{fM}{r_0}}$$

其中f为引力常数，M为地球质量。此时卫星的无摄动轨道，是半径为r_0的圆，圆心与地心重合。速度v_k称为地心距离为r_0的圆周速度。

乘积fM称为地心引力常数；由此再借助任何一个已知的r_0可以算出v_k。对某一给定的卫星，还可以将v_k的计算公式

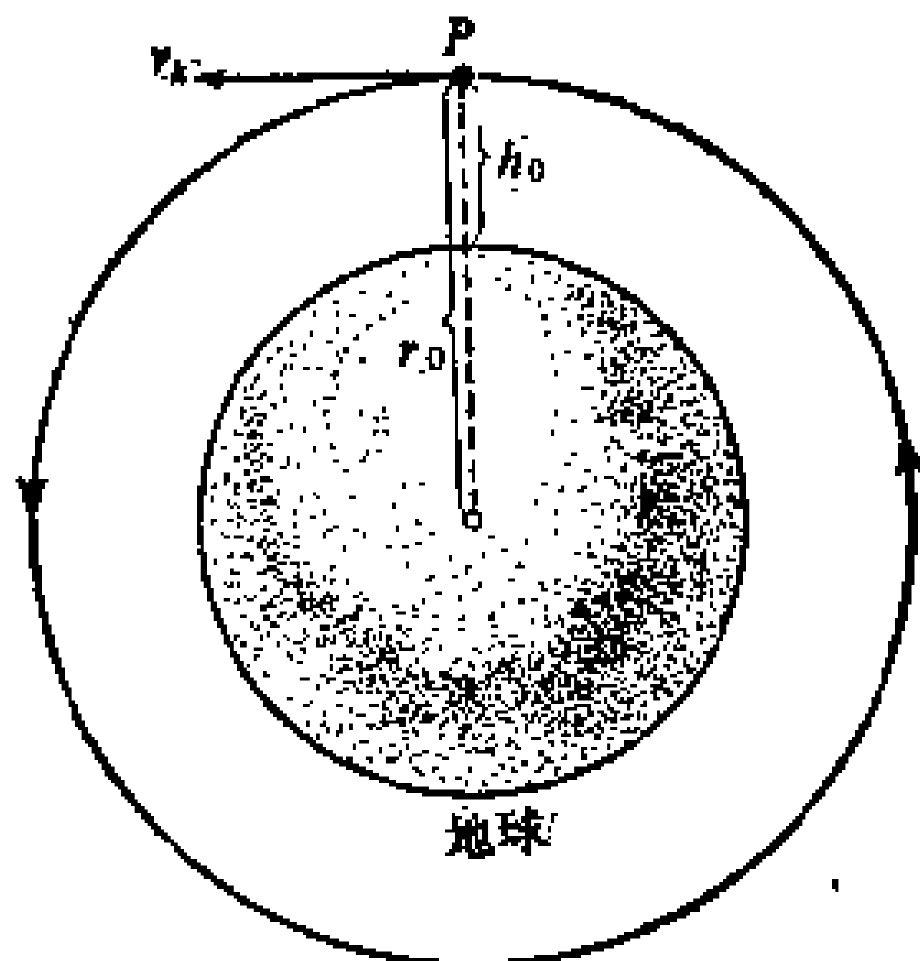


图 40　圆轨道的人造卫星

化为更方便的形式。取地球半径$R=6378$公里（准至1公里），可以得到初始圆周速度$v_k=7905$米/秒。因而上式改写成：

$$v_k=\sqrt{\frac{fM}{R}}\cdot\sqrt{\frac{R}{r_0}}=7905\sqrt{\frac{R}{r_0}}\text{米/秒。}$$

这样，公式中只含比值R/r_0，不存在fM数值的变化依赖于长度、质量、时间的单位的关系。

卫星的圆周速度，也称为第一宇宙速度。当r_0增加时，卫星的圆周速度减少。例如：在赤道上高出地面100公里的卫星（即$r_0=6478$公里），其$v_k=7844$米/秒。对于在300公里高处的卫星（$r_0=6678$公里），其$v_k=7726$米/秒●。

现在，假设卫星进入轨道时刻的速度v_0大于圆周速度而

● 人造卫星对某地因纬度不同引起的地面高度差可按公式计算：$r=(6378-21\cos^2\varphi)$公里，因而卫星对不同的地面高度相差最大为$21\cos^2\varphi$公里。

小于抛物线速度，即：

$$\sqrt{\frac{fM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2fM}{r_0}}$$

而方向也是水平的，这时轨道为椭圆（图41），轨道的半长轴a和偏心率按下式计算：

$$a = \frac{r_0}{2 - \left(\frac{v_0}{v_k}\right)^2}$$

$$e = \left(\frac{v_0}{v_k}\right)^2 - 1。$$

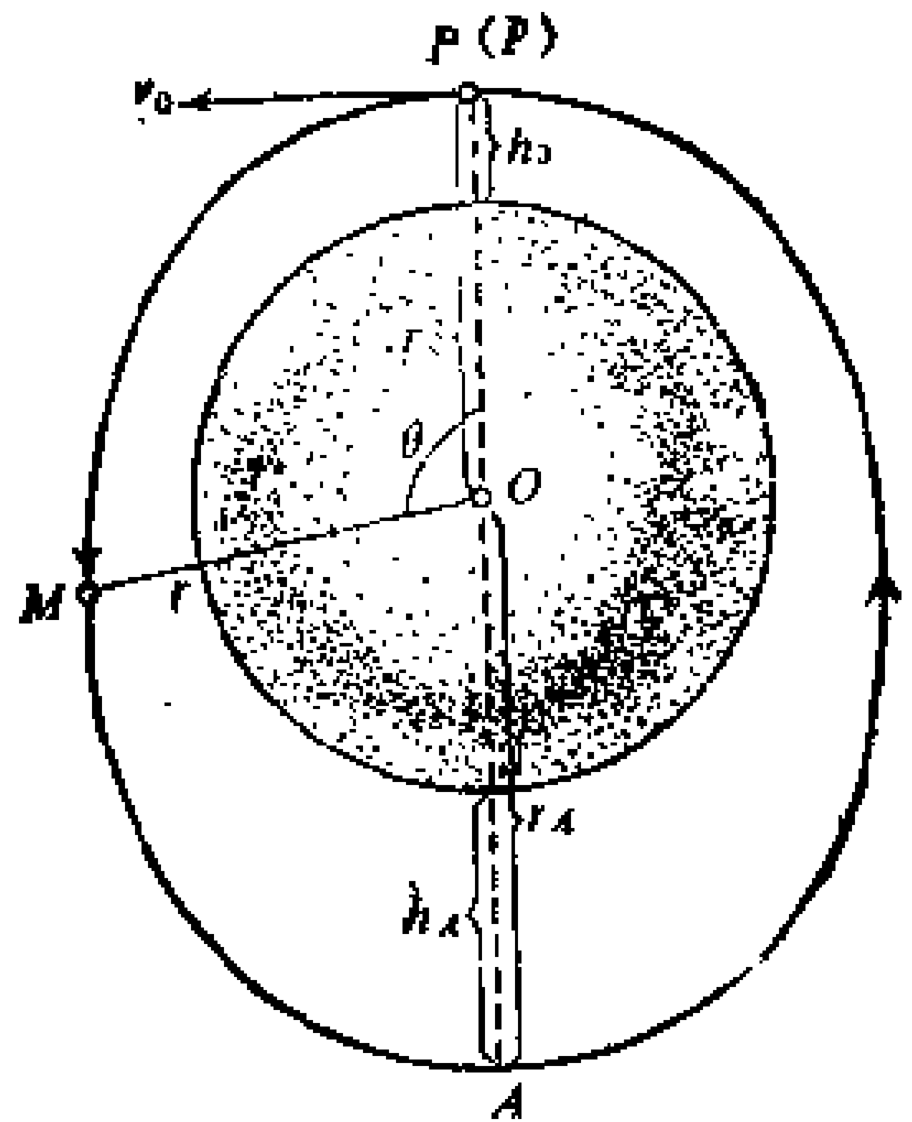


图 41　人造地球卫星具有水平速度v_0时进入椭圆轨道

轨道近地点（即最接近地心，从而也最接近地面的点）与卫星进入轨道时刻的位置P吻合。因而，如果在这时刻卫星在地面上的高度等于h_0，那么这一时刻就是它随后沿无摄动椭圆轨道运动时在地球表面上的最小高度。远地点，即轨道上离地心也是离地面最远的一点。它对于地心的距离等于：

$$r_A = a(1 + e)$$

地面上的远地点高度等于

$$h_A = r_A - 6378\text{公里}$$

卫星在轨道上任一点的地心距离由下式计算：

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

其中θ是轨道上该点M方向与近地点方向间的夹角。

可以看出：轨道偏心率e与r_A，h_A有关。近地点至地心距离r_P和近地点的地面高度h_P已知时，按下式计算偏心率：

$$e=\frac{r_A-r_P}{2a}=\frac{h_A-h_P}{2a}。$$

设想有一按圆轨道运动的卫星，其地心距离R＝6378公里，那么，旋转周期等于：

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{fM}}=84.486分。$$

一个运动在半长轴为a的椭圆轨道上的卫星，其周期T应满足下面关系：

$$T=T_0\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2}。$$

按开普勒第二定律，作椭圆轨道运动的卫星的速度是：

$$v=\bar{v}\sqrt{\frac{1+2e\cos\theta+e^2}{1-e^2}}$$

其中 $\bar{v}=\sqrt{\frac{fM}{a}}$ 叫做平均速度，等于半径为a的圆轨道速度。在近地点速度是：

$$v=\bar{v}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

这是最大速度。在远地点速度最小，等于：

$$v=\bar{v}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

如果卫星在时刻t_0进入轨道的速度v_0大于圆轨道速度而小于抛物线速度，它与水平方向夹角为Ψ，那么卫星在这个时刻的位置不与轨道近地点重合（图42）。至于半长轴和旋

转周期不依赖于速度的方向，可以按以上的公式计算；但是偏心率e则增大。可以由下式得到：

$$e^2 = e_0^2 + (1 - e_0^2)\sin^2\Psi。$$

其中e_0为按上式中$\Psi = 0$时的轨道偏心率数值。同时近地距减少。如果此时水平速度（$\Psi = 0$）在r_P重合，那么对$\Psi \neq 0$，有：

$$r_P = r_0\frac{1 - e}{1 - e_0},$$

近地距r_P和近地点地面高度h_P，由下式决定：

$$r_P = a(1 - e)$$

$$h_P = r_b - 6378\text{公里。}$$

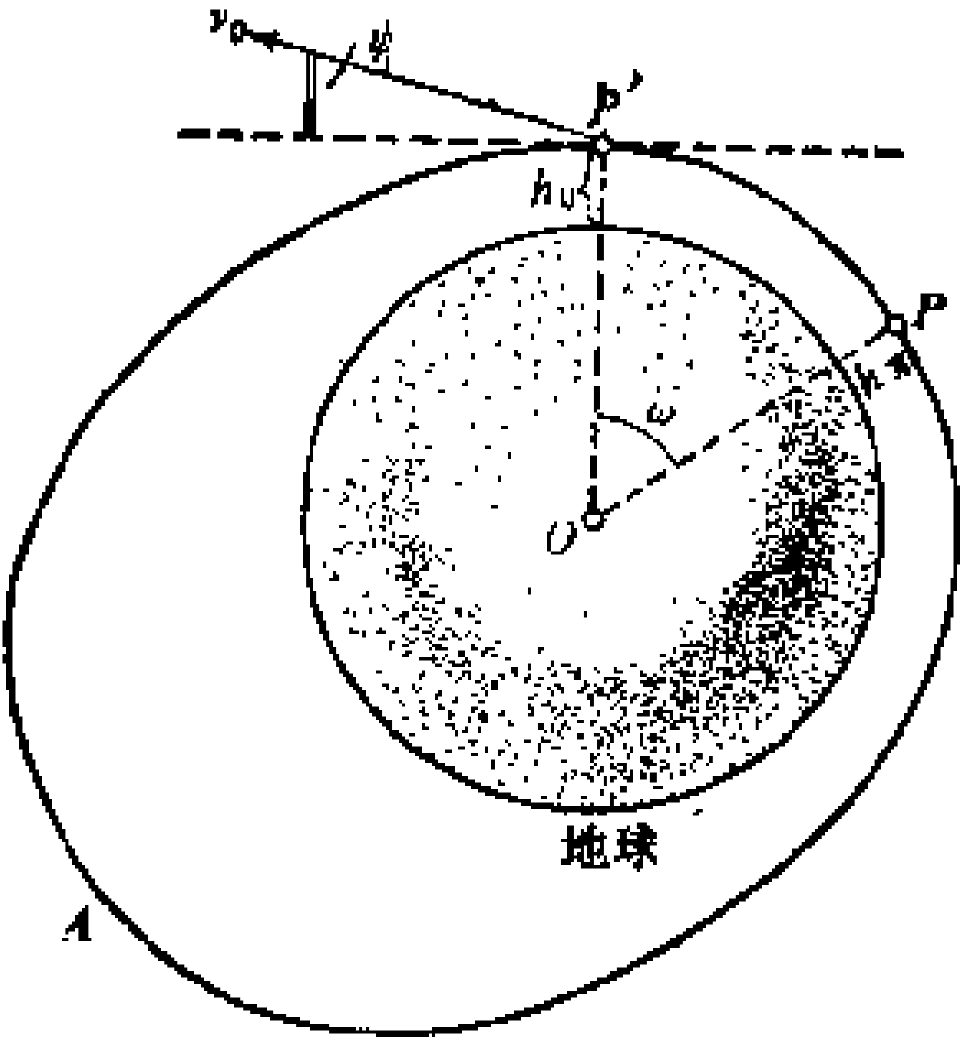


图 42　人造地球卫星具有v_0，与水平成夹角情况下的椭圆轨道

r_P与卫星的近地点地面高度同时减少。卫星进入轨道时刻的地面高度与近地点高度之差$h_0 - h_P$对于小的轨道偏心率来说，可以近似地按下式计算：

$$h_0 - h_P \doteq r_0(e - e_0)。$$

卫星的向径OP和拱线之间夹角ω表为下式：

$$t_{an\omega} = \frac{\cos\Psi\sin\Psi}{\cos^2\Psi - \left(\frac{v_k}{v_0}\right)^2},$$

其中v_k是地心距离为r_0的圆轨道速度。

发射人造地球卫星，除考虑地球引力之外，还要考虑地球大气的影响。在高度150～160公里范围，它对任何天体都

会给以相当大的阻碍（虽然在这样的高度大气的密度比海平面密度小十亿倍）。在这种高度运动的人造卫星，绕地球运动最多也只能是一两圈，由于大气阻力而使它快速下降，并发热和“烧掉”。所以，人造卫星进入轨道瞬间的地面高度和它的速度，应当适应于近地点高度超过150—160公里的椭圆轨道。

如果人造卫星在t_0瞬间射入椭圆轨道的近地点和远地点，那么它离地面的高度分别为h_P和h_A。如果这个入轨点与近地点重合，那么，在这瞬间高度h_0等于h_P，而水平速度v_0应为$v_P = v_k\sqrt{1+e}$。e为偏心率（由h_A和h_P的数值计算而得），v_k为高度h_0上的圆轨道速度。如果入轨点与远地点重合，那么高度h_0应当等于h_A，也即比上述情况高一些。但是v_0还是水平方向，但要小些。$v_0 = v_A = v_P\dfrac{1-e}{1+e}$。如果入轨点在近、远地点之间，那么高度$h_0$应在$h_P$和$h_A$之间，而速度$v_0$也介于$v_P$和$v_A$之间，速度方向则同水平有夹角。

但是，实际上使人造卫星在近地点处入轨，是较有利的。因为这时，在这个最小的可能离地高度上发射卫星的火箭消耗燃料最少。

至于在h_P和h_A之间的轨道上其它点入轨，消耗的能量都要大些。因为卫星的入轨点速度v_0的减少，不能抵偿在主动段火箭高度h_0增大时消耗的能量。

基于这个理由，火箭的运动是这样计算：使卫星在入轨时，它的速度方向与水平差别较小（严格的水平速度不能保证）。这个时刻，卫星位置在近地点附近。

根据卫星发射后几天内的观测，我们可以计算它的轨道根数，并与预定的轨道根数比较。

中国的第一颗人造卫星《东方红》号❶发射后的轨道周期为114分钟。由前面公式可求出其轨道半长轴：

$$a = 6378\left(\frac{114}{84.49}\right)^{2/3} = 7788\text{公里。}$$

由于《东方红》号发射后h_A与h_P分别为2384与439公里，因此：

$$e = \frac{1945}{15576} = 0.125\text{。}$$

《东方红》号的轨道对赤道面的倾角$i = 68°.5$。图43表示这轨道对于地球的位置情况。

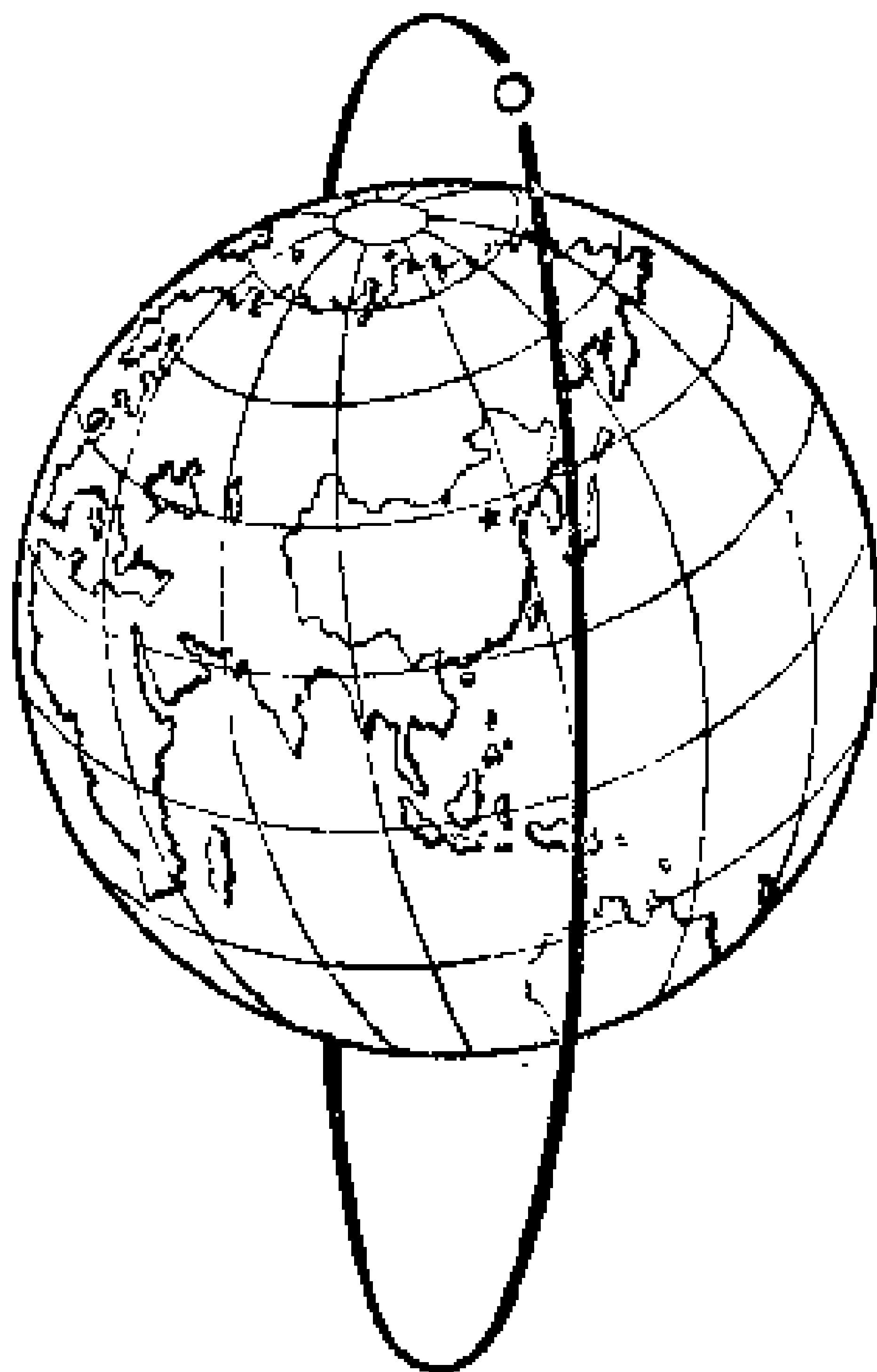


图 43 中国第一颗人造地球卫星的轨道

❶ 此段由译者添入。

下表记载中国发射的第一、二两颗人造地球卫星的初始轨道根数。

	I.《东方红》	II.科学实验卫星
发射日期：	1970年4月24日	1971年3月3日
重量：	173公斤	221公斤
T：	114分	106分
a：	7790公里	7424公里
e：	0.125	0.111
h_P：	439公里	266公里
h_A：	2384公里	1826公里
i：	68°.5	69°.9

苏联第一颗人造卫星发射后第一天的近地点高度为228公里，远地点高度947公里，周期96.17分。按上面公式计算，轨道半长轴和偏心率为：

$$a=6378\left(\frac{96.17}{84.49}\right)^{2/3}=6953\text{公里},$$

$$e=\frac{947-228}{2\times6953}=0.0517。$$

对于近地点速度v_P为7974米/秒，远地点速度v_A为7190米/秒。这样，这颗卫星在入轨瞬间，它大约位于距地面228公里处，而速度约为7974米/秒。

可以看到，在这种较小的高度h_0（与地球半径相比）上，卫星入轨时的速度方向，只要与水平有或大或小的偏差，那就很危险。例如：在高度$h_0=228$公里和速度$v_0=7974$米/秒而方向同水平的夹角$\Psi=2°$的情况下，我们可以算得：

$e=0.0636$，　　$h_P\approx h_0-r_0(e-e_0)=149$公里，

也即这时与入轨瞬间达到的高度h_0相比，高度h_P约减少79公里。具有这样的近地点高度的人造卫星，很快就要殒落。

入轨速度v_0的大小变化，强烈地改变远地点的高度h_A。例如：第二和第三颗苏联人造卫星，在发射后一天，离地面的最小高度约224—225公里。但是最大高度相当大（为1671和1880公里）。如上所说，可以计算出在入轨时，这卫星具有大约8151米/秒和8198米/秒速度。第二颗卫星的速度与第一颗人造卫星相比约增加177米/秒或1.8%。对第三颗卫星来说，约增加224米/秒或2.8%。

发射的人造卫星的无摄动轨道，有各种各样形式，但是可归纳为下面几种基本类型：

圆和近圆形轨道：高度h_P和h_A相等或相差极小。可分为近地卫星（运动于离地面高度200～500公里），中等高度卫星（在500到数千公里高处），和远地卫星（离地面数千公里或更远处）。这种轨道偏心率约在0.01至0.02之间或更小些。

小偏心率的椭圆轨道(偏心率小于0.2)：h_A和h_P之差在数百到数千公里之间。

高偏心率的椭圆轨道（偏心率大于0.2)：高度h_A大于h_P几十到几百倍，近地点高度h_P，对所有椭圆轨道，通常不大于500—600公里。

按轨道的空间分布，可以分为：赤道卫星和近赤道卫星（与赤道倾角大约在20～30°)；中等倾角卫星(倾角50～60°)；极卫星和近极卫星（倾角80～95°）。

$i>90°$的轨道，这种卫星以相反的方向即以同赤道成$90°-i$的倾角、从赤道北向南穿过赤道平面，这称为反向卫星。

运行周期T比地球自转周期$T_0=1436.07$分钟小(或大)成整数倍的卫星是有趣的。它与地球的明显的运动关系每昼

夜都会重复出现。特别有趣的是"昼夜卫星"，它的$T=T_0$。"昼夜赤道卫星"为圆轨道，称为固定卫星。它始终位于地球赤道上空某位置上。下面举几个圆形或近圆形轨道的人造卫星的例子：

1．苏联第二个飞船卫星（1960年8月19日发射，绕地球18圈），$h_P=306$公里，$h_A=339$公里，$e=0.0025$，$i=65°$。

2．苏联科学宇宙站《礼炮-4》号（1974年12月26日发射）；在1976年12月27日，$h_P=256$公里，$h_A=277$公里，$e=0.0016$，$i=51°.6$。这属于中等倾角的近地卫星。

3．美国轨道太阳天文台《oso-1》(1962年3月发射)，$h_P=553$公里，$h_A=595$公里，$e=0.0030$，$i=32°.85$。

4．苏联人造地球卫星《宇宙-158》(1967年5月发射)，$h_P=850$公里，$h_A=850$公里，$e=0$，$i=74°.5$。

5．美国秘密卫星《Navsat》(1964年7月发射)。$h_P=854$公里，$h_A=956$公里，$e=0.0070$，$i=90°.42$。

6．苏联人造卫星《宇宙-894》(1977年2月21日发射)。$h_P=988$公里，$h_A=1026$公里，$e=0.0026$，$i=83°$。

7．美国军用卫星《迈达斯-4》，(1961年10月发射)，$h_P=3496$公里，$h_A=3756$公里，$e=0.0130$，$i=95°.89$。这些都是中等高度轨道；后面三个是极卫星。

8．美国通讯卫星《辛康-1》，(1963年2月发射)，$h_P=34392$公里，$h_A=36739$公里，$e=0.02797$，$i=33°.30$。

9．美国通讯卫星《国际通讯-3D》，(1969年5月发射)，$h_P=35777$公里，$h_A=35803$公里，$e=0.00031$，$i=1°.0$。

10．美国卫星《维拉霍特尔》(1964年7月发射)，$h_P=101959$公里，$h_A=104591$公里，$e=0.0120$，$i=39°.58$。这些都是远距卫星。并且《辛康-1》属昼夜同步卫星(周期T=

1424.5分），而《国际通讯-3D》属昼夜固定卫星（周期T = 1436.3分）。

小偏心率椭圆轨道的人造卫星的例子，是1957年苏联发射的第一颗人造卫星。

高偏心率的椭圆轨道人造卫星举例如下：

1．苏联人造卫星《电子-1》(1964年1月发射)，h_P = 406公里，h_A = 7100公里，e = 0.3305，T = 169分。

2．苏联人造卫星《电子-4》(1964年11月发射)，h_P = 459公里，h_A = 66325公里，e = 0.828，T = 1314分。

3．美国卫星《探险者-26》，(1964年12月发射)，h_P = 316公里，h_A = 26191公里，e = 0.69900，T = 456.26分。

这个卫星的周期$T \approx \frac{1}{3}$日。

4．苏联卫星《宇宙-204》(1968年3月发射)，h_P = 230公里，h_A = 148228公里，e = 0.91802，T = 3795.9分。

5．苏联《闪电-1》卫星(1965年4月发射)，h_P = 548公里，h_A = 39957公里，e = 0.7405，T≈720分。

现在《闪电》卫星已经发射了30多个；它适用于转播电视节目和长距离无线电通讯。这些卫星的周期为半天。

6．美国通讯卫星《国际通讯-2》(1966年10月发射)，h_P = 3424公里，h_A = 37531公里，e = 0.63500，T = 730分。

7．美国卫星《ERS-18》(1967年4月发射)，h_P = 8604公里，h_A = 111229公里，e≈0.774，T = 2829.6分。

这个卫星周期约两天。

最后一个卫星具有这样的特点：它的轨道具有很大的近地点高度，而且具有这样高偏心率，也属少见。

将人造卫星射入具有很大近地点高度、高偏心率的椭圆

轨道，或高度很高的圆轨道时，可以分为两个阶段。首先把人造卫星送上近地点较低（$h_P=250-400$公里）、远地点很高（例如35000公里）的高偏心率椭圆轨道，同时在卫星上装有喷气发动机。随后，当卫星达到原来轨道远地点时，发动机开动，人造卫星获得附加速度，过渡到具有同样的远地点$h_A\approx35000$公里、而近地点h_P显著增大的轨道。这样，我们就得到$h_P=h_A\approx35000$公里的圆轨道人造卫星。

例如：设人造卫星先在高度（赤道上空）$h_P=400$公里、$h_A\approx35000$公里的轨道上运行。它在远地点和近地点的速度，按前面公式计算可得$v_P=10094$米/秒，$v_A=1612$米/秒。同样，我们得到地心距离为(6378＋35000)公里的圆周速度$v=3104$米/秒。那么，如果在原来的轨道远地点卫星获得附加速度$v-v_A=1492$米/秒，那么，它就过渡到$h_P=h_A=35000$公里的圆轨道。

18、人造地球卫星的摄动运动

从天体力学的观点来说，人造地球卫星的摄动是很有趣的。就是这种摄动的存在，使得分析卫星运动问题成为困难。人造卫星的摄动运动，最方便是借助于椭圆轨道的吻切根素来描述，（图44）表示人造地球卫星在空间环绕地球的椭圆轨道略图。其中$O\gamma$由地心指向春分点，OK指向轨道升交点，也即：卫星由南向北飞行时轨道在这里与赤道相交的一点。P为轨道近地点。轨道的形状和大小由半长轴a和偏心率e决定；轨道平面在空间的位置由升交距角Ω（轨道升交点经度）和倾角i决定。升交距角即$O\gamma$与OK之间夹角，从$O\gamma$向

东计量。倾角i是轨道面与赤道面的夹角。由赤道面向轨道投影正向（卫星运动方向）间的夹角来计量，由0°到180°。

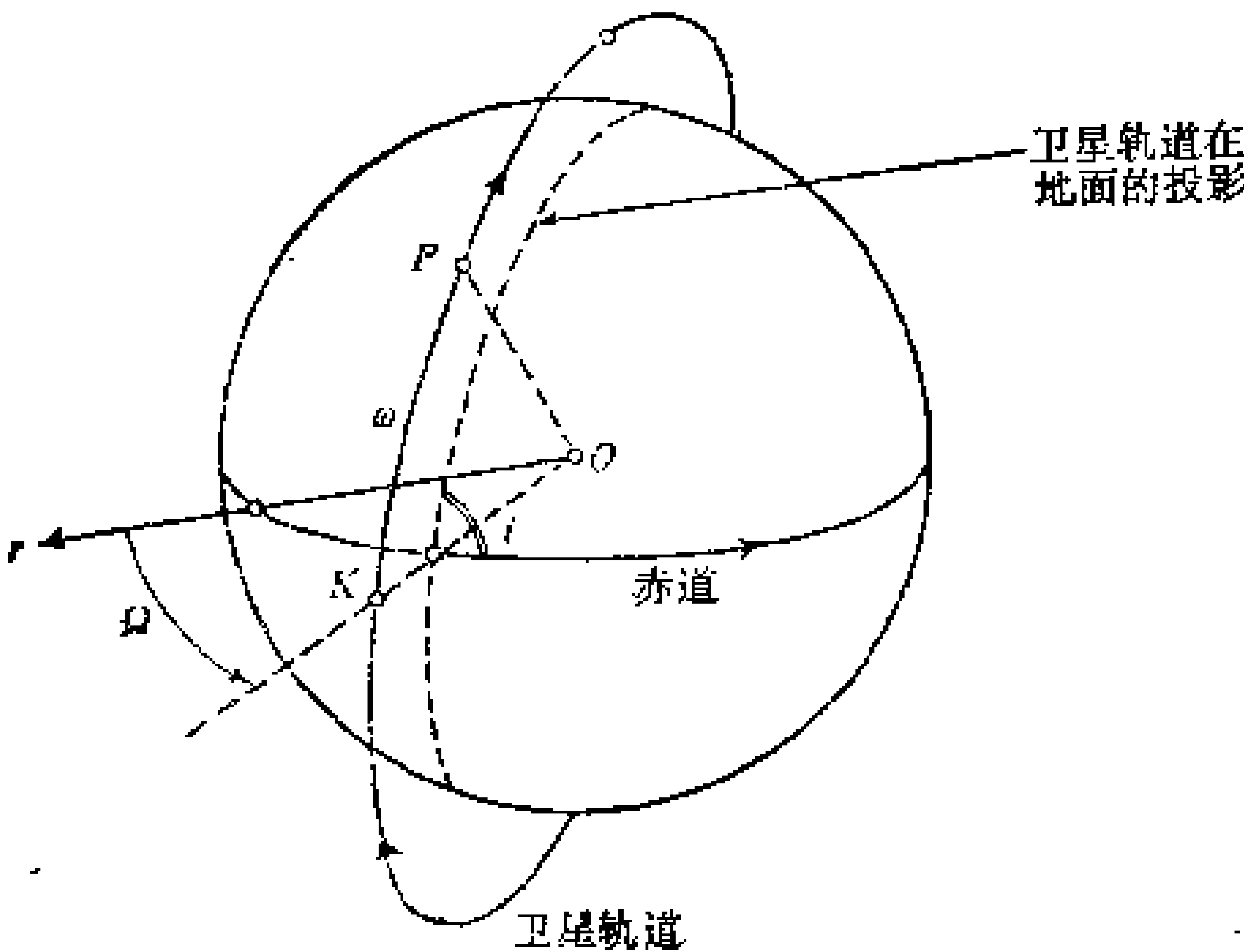


图 44 人造地球卫星在空间的方位。箭头指示沿赤道计量的位置和卫星运动方向。

卫星在轨道平面上的方位，由角度ω（近地点和赤道面的地心张角），即方向OK和OP间的夹角计算。

如果我们任意选定一个时刻t_0，那么由这时刻开始，在连续几圈的时期内，卫星在空间的运动几乎都是沿一个相同的椭圆轨道进行的。但是，例如经过10—15天，我们发现卫星绕地球一至两圈的期间内，卫星还是几乎沿着椭圆运行，这个椭圆同以前计算的相比，已经显著地改变它的大小和空间方位了。轨道根素的改变，提供人造卫星运动的摄动特性。对于近距和中距运动的人造卫星轨道受到摄动的基本原因是：1）大气阻力，2）地球扁率和密度的不均匀性（也即地球的引力与牛顿引力球体的差别），3）太阳的辐射压力。

对于远距离卫星，它们与地球的距离计有数万公里或更大，主要摄动是来自太阳和月亮的引力。类似于太阳系中自然卫星的摄动。

在普通结构的卫星，也就是尺寸不大而有大量的仪器和金属零件，因而较重的宇宙飞行器的情况下，高度在500至600公里，大气阻力起重要作用。它在某种程度上影响到相当大的高度（1000～3000公里）。对于具有较大尺寸和小质量（外径30米，质量68公斤的汽球卫星《回声—1》，大气阻力还能在离地面高度1500公里处明显地表现出来。

地球大气的阻力是：人造卫星与空气分子碰撞，从而使卫星损失了动能。阻力R与大气密度ρ、卫星横截面积S、卫星速度v的平方成正比，也即由下式确定：

$$R = c\rho S v^2,$$

其中c为无量纲的比例系数。在近似计算人造卫星运动的情况下，可以将它定为1.1。由于这个力的作用而使卫星所受到的制动力等于：

$$W = \frac{R}{m} = \frac{cS}{m}\rho v^2$$

其中m为卫星质量。

量$\frac{m}{S}$（卫星单位横截面积的质量）称为横截负荷。横截负荷越大，W越小。

当然，大气阻力以及对人造卫星的制动力与地心引力和加速度（支配卫星运动的力产生）相比，要小得多。例如：假设卫星质量为100公斤，横截面积1米^2＝10^4厘米^2，速度为8公里/秒＝8×10^5厘米/秒，在地表以上的高度h＝160公里，$\rho=10^{-12}$克/厘米^3，则：

$$R = 7040\text{达因}\ (= 7.18\text{克}),$$

$$W = 0.070\text{厘米/秒}^2;$$

在$h = 225$至230公里，$\rho = 3 \times 10^{-13}$克/厘米^3，则得：

$$R = 1.9\text{克}$$

$$W = 0.021\text{厘米/秒}^2。$$

在同一时间，地球引力(按地球为球形计算)，产生的加速度W_0决定于下式：

$$W_0 = \frac{fM}{r^2},$$

其中r为到地心距离。在$h = 160$公里时，取$r = 6538$公里$= 6.538 \times 10^6$米时，得：

$$W_0 = \frac{3.986 \times 10^{14}}{42.8 \times 10^{12}} = 9.33\text{米/秒}^2;$$

在$h = 230$公里时，取$r = 6.608 \times 10^6$米，得：

$$W_0 = 9.14\text{米/秒}^2,$$

因此，在$h = 160$公里和$h = 230$公里时，振动加速度与主力的加速度的比值$\frac{W}{W_0}$分别为$\frac{1}{15000}$和$\frac{1}{50000}$。但是，大气影响仍然导致卫星运动的变化。

假设卫星最初的轨道是椭圆1（图45）。由于大气密度使卫星的地面高度很快下降，因此在近地点的轨道区段，卫星受到的制动最敏感。至于远地点附近，大气阻力实际上不起任何作用。例如：苏联的头三颗人造卫星在开始时的运动就是这样。在图45中示明这个轨道区段LN区。这个区段以外大气密度的阻力可以忽略。

设人造卫星以速度v_1由近地点P出来，以后，在椭圆1上运动。卫星离近地点越远，运动速度按开普勒第二定律渐

减；而到远地点，它的速度达到最小值即：

$$(v_A)_1=\sqrt{\frac{fM(1-e_1)}{a_1(1+e_1)}},$$

其中a_1为半长轴，e_1为椭圆1偏心率。以后，卫星继续沿轨道1运动，转回到近地点P，在这里就受到制动力。如果简略地设想，人造卫星不在LN整个区段受到阻力，而仅仅在近地点（在这里仿佛是碰上必须突破的壁垒）；那么，由P点出来，速度保持原来方向，但是数值减小了。记新速度为v_2 ($v_2<v_1$)。下一圈人造卫星就沿着轨道2运行，在近地点相应的速度为v_2。对于这条轨道，远地点高度h_A、也就是说半长轴a_2比椭圆轨道1的小。近地点高度h_P对轨道1来说维持不变；就是说，轨道2有较少缩短，它的偏心率比轨道1的要小。

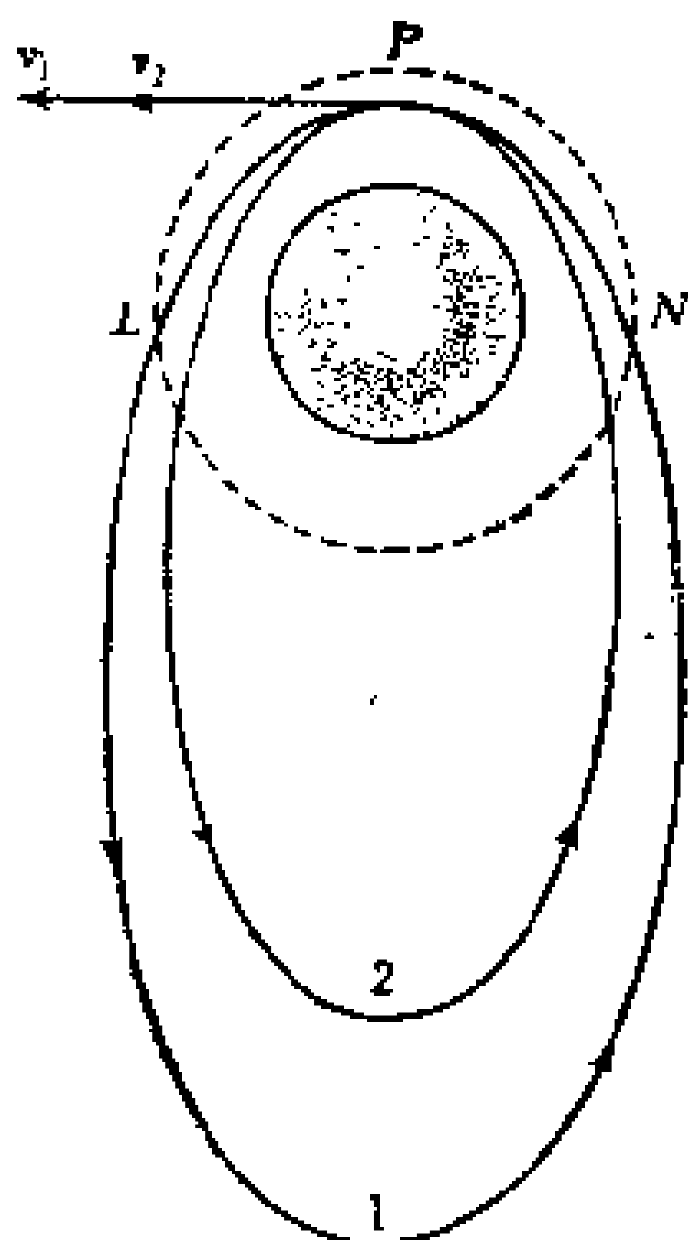


图 45 人造地球卫星由于地球大气阻力产生制动，虚线表示此区域。卫星轨道在此区域以外，大气阻力可不计。

我们简化地假设：人造卫星仅在近地点P受到阻力，这时远地点高度渐渐降低，而近地点高度保持不变。事实上，突出的阻力发生在近地点附近某区段。结果也使近地点高度下降；尽管这种下降相对很小，但使人造卫星不是准确回到近地点P、而是在P′位置，比P点更接近地球表面。

这样，人造卫星的轨道半长轴、偏心率、远地点和近地点高度受到长期摄动，逐渐减小（远地点高度下降更快），

人造卫星一圈比一圈更接近地面。这个轨道根素的减少速率，与轨道近地点附近大气密度有关。

同时，卫星旋转周期也在减少，按开普勒第三定律，周期与半长轴有关。骤然看来后一事实似有矛盾。事实上，旋转周期减少，就使卫星运动的平均速度增加。结果是：卫星在地球大气中受到阻力作用，但是同时平均运动越来越快。

这是因为：虽然近地点附近产生阻力而使卫星速度减少；但是在远地点附近速度则是增加。事实上，如果以e_2记图45中轨道2的偏心率，那么，卫星在轨道2的远地点的速度等于：

$$(v_A)_2=\sqrt{\frac{fM(1-e_2)}{a_2(1+e_2)}}。$$

因为$a_2<a_1$，$e_2<e_1$，所以$(v_A)_2>(v_A)_1$。这就导致：在轨道2的远地点上，卫星变得比在轨道1的远地点更接近地球，所以地球引力强一些。引力的增加导致卫星加速度和速度的增大。近地点附近的阻力，由卫星远地点附近加速度和速度的增加所补偿，而卫星运动平均速度增加。

例如：1958年10月10日，苏联第三颗人造卫星的轨道根素a=7318公里，e=0.09970。按公式：

$$\tilde{v}^2=\frac{fM}{a^2}\qquad v_P^2=\tilde{v}^2\frac{1+e}{1-e},\qquad v_A^2=\tilde{v}^2\frac{1-e}{1+e}.$$

求得平均速度$\tilde{v}$、近地点速度v_P和远地点速度v_A为：

$\tilde{v}$=7381米/秒，v_P=8157米/秒，v_A=6678米/秒。

在10月10日计算得下列根素：

a=7285公里　　e=0.0954。

以这为基础得：

$\tilde{v}$=7398米/秒，v_P=8144米/秒，v_A=6720米/秒。

由于人造卫星逐渐下降到整个较稠密的大气层中，因此所受的阻力随时间增加。所以，由于轨道半长轴和周期的减少，因而它的速度应该逐渐增大。

例如：苏联第一颗人造卫星半长轴a和周期T，在1957年10月4日、21日、11月9日和12月31日的数值如下：

日期	10月4日	10月21日	11月9日	12月31日
a(公里)	6953	6924	6884	~6660
T(分)	96.17	95.55	94.72	~90

在所给日期中每一昼夜卫星的半长轴、周期的平均变化为：

	10月4日~21日	10月21日~11月9日
Δa(公里)	1.82	2.11
ΔT(秒)	2.12	2.62

	11月9日~12月31日
Δa(公里)	~4.3
ΔT(秒)	~5

由这公式，可以算出人造卫星在每一圈里，由于大气阻力而使半长轴的变化Δa、偏心率的变化Δe和近地点高度的变化Δh_p很快减少。这时的轨道情况是远地点高度至少比近地点高度高出80公里；但是偏心率还不太大，所以能够取准到e和e^2数量级的Δa，Δe，Δh_p的表达式为：

$$\Delta a=\frac{2cS}{m}\rho_p a^2\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\left(1+\frac{1}{8r}+2e+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{4}\frac{e}{r}\right)$$

$$\Delta e=\frac{2cS}{m}\rho_p a\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\left(1-\frac{3}{8r}+e\right),$$

$$\Delta h_p=\frac{2cS}{m}\rho_p a^2\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\cdot\frac{1}{2r}\left(1+\frac{3}{8r}\right)。$$

其中，ρ_P为轨道近地点高度h_P处的大气密度；$r=\frac{ae}{H}$ 而H

是表示卫星在高度h_P处大气密度减少的速度的量。如果公式中的S，m，ρ_P和a采用C、G、S制，那么，我们得到的Δa，Δh_P就以厘米计。在一圈中，周期T的减少按下式计算：

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{3}{2}\frac{\Delta a}{a}。$$

如果要很好地了解在地面上任何高度的大气密度，那么，利用上述公式以及其它更精确的公式，从理论上计算大气阻力对轨道根素的影响，也没有特别困难。但是，这方面也包含问题的复杂性。就是在发射人造卫星以前，关于离地面高度为200公里或更高处的大气密度资料是很不可靠的。正是通过人造卫星观测，才得以弄清这些资料。

任一高度附近的大气密度，可近似地表为下式：

$$\rho^{(h)}=\rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}},$$

其中ρ_0为高度h_0处的密度，而H为高度h_0处的大气均一高度；而在密度ρ变为e＝2.72倍的时候，大气均一高度与高度差$h-h_0$相等。利用数值H计算ν时，半长轴以公里表示。

因为乘积ae等于轨道远地点和近地点高度差的一半，所以，在远地点处的大气密度，约减少为近地点处的$1/e^2r$。按上面的公式，为便于计算，取$h_A-h_P>80$公里和$h_P=200\sim500$公里，那么：

$$\frac{\rho^{h_P}}{\rho^{h_A}}\approx 2.5,$$

以上的$\rho^{(h)}$公式是近似的；这正象在1959年查明的那样（首先是由人造卫星的运动分析得到），在给定高度的地球大气密

度不是常数。它有周期约一昼夜的变化。白天（受太阳照射的大气层部分）的大气密度，一般说来，比夜晚（这时这个大气层处在地球影锥里）要大一些。这种差别，从离地面高度350公里开始以及再向上处，尤为明显。在高度350公里处的密度，白天比夜间约大1.2倍；在高度500公里处，约大3倍；而在700公里处，约大10倍。此外，还有来自太阳照耀，使得大气层之间产生交换过程；而在太阳活动剧烈时，大量的微粒流增加，从太阳抛出并轰击地球大气，使密度增加。

在表6，列出1959年的夜间大气密度和H的近似值。在这一年最大的白天密度：在400公里高度，约9×10^{-15}克/厘米^3；500公里高度，约为3×10^{-15}克/厘米^3；700公里处为4.6×10^{-16}克/厘米^3。在1964年夜间密度值为最小（因为处在太阳活动最小周期）：在400公里高度，约为5×10^{-15}克/厘米^3；在500公里高度，约为7.6×10^{-17}克/厘米^3。

这样的大气密度振动，它的数值往往很难事先准确预报，就使人造卫星轨道变化的计算问题大大复杂化。同时，正是人造卫星运动的分析，也有助于同其它因素有关的大气密度变化的研究，来探讨发生在大气层中的过程。

表 6

h(公里)	ρ(克/厘米^3)	H	h(公里)	ρ(克/厘米^3)	H
0	1.255×10^{-3}		500	1.0×10^{-15}	76
120	1.0×10^{-11}		600	2.0×10^{-16}	84
140	3.3×10^{-12}		700	5.1×10^{-17}	92
160	1.0×10^{-12}		800	1.4×10^{-17}	
200	4.9×10^{-13}	32	900	3.8×10^{-18}	
300	3.7×10^{-14}	52	1000	1.0×10^{-18}	
400	5.5×10^{-15}	65			

上表中到200公里高度资料，得自地球物理火箭中气压计所测量的大气密度，误差20%。

利用155页公式作实例计算。

苏联第一颗人造卫星，球形直径58厘米，质量83.6公斤，1957年10月4日它的轨道根素a，T，e，h_P如下：

a = 6952公里　　T = 96.15分　　e = 0.0517，

h_P = 227公里，

采用H = 40，得：

$$\frac{2cS}{m} = \pi\frac{2.2\times29^2}{83600} = 0.0695\text{厘米}^2/\text{克}。$$

$$\nu = 6952\times0.0517\times\frac{1}{40} = 8.985,\ \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} = 0.836,$$

$$\Delta a = 0.0695\times(6.952\times10^9\times0.836\times1.12\rho_P)$$
$$= 3.14\times10^{16}\rho_P\text{厘米}。$$

严格地说，我们得到的是对于某历元的确定轨道根素时，人造卫星绕地球一圈的轨道半长轴的变化。在以后各圈，a，e，h_P都产生变化，从而从头算出Δa，Δe和Δh_P。但是，如果a，c，h_P在该间隔中变化很少，那么按114页公式计算时，Δa，Δe，Δh_P可略去。这样，我们就认为在该间隔中，Δa，Δe，Δh_P保持常数。乘以圈数，近似地得到在该间隔中a，e，h_P的整个改变量。自1957年10月4日开始，在一天(24小时 = 1440分)，半长轴约减少：

$$(\Delta a)_1 = 3.14\times10^{16}\rho_P\times\frac{1440}{96.17} = 47.0\times10^{16}\rho_P\text{厘米}。$$

每昼夜周期的改变是：

$$(\Delta T)_1 = \frac{3}{2}T\frac{(\Delta a)_1}{6.952\times10^8} = 5.85\times10^{12}\rho_P\text{秒}。$$

在高228公里处，$\rho \approx 3\times10^{-13}$克/厘米^3。这样，

$$(\Delta a)_1 = 1.41\text{公里}，(\Delta T)_1 = 1.75\text{秒}$$

在5天中（1957年10月9日）得：

$$(\Delta a)_5 = 7.05\text{公里}，\quad (\Delta T)_5 = 8.75\text{秒} = 0.146\text{分}$$

在10月9日，实际周期为：

$$T = 96.02\text{分}。$$

即由观测得到T减少0.13分，与计算的相符合。

按公式计算，五天中Δe，Δh_p的值为：

$$(\Delta e)_5 = 0.00012，(\Delta h_p)_5 = 0.365。$$

在有大量准确数据的情况下，关于某个卫星在不同时刻的轨道根素，还可提出相反的问题：求出最好的与轨道半长轴和运行周期的变化相符合的不同时刻，相应的轨道近地点附近的大气密度值。

表 7

日期	圈数	a (公里)	T (分)	e	h_A	h_P	Δa 米/圈	ΔT 秒/圈
1958年5月15日	0	7418	105.95	0.1116	1880	224	—	—
22日	102	7414	105.870	0.1108	1857	—	39.2	0.0470
								±60
6月4日	304	7405	105.680	0.1090	1834	—	43.5	0.0565
								±30
7月26日	992	7376	105.075	0.1064	1794	—	42.1	0.0527
								±9
10月30日	2028	7318	103.825	0.0997	1670	—	56.0	0.0723
12月18日	3000	7244	102.24	0.0917	1530	—	76.1	0.0970
1959年2月27日	4000	7176	100.80	0.0832	1395	—	68.0	0.0865
5月8日	5000	7114	99.51	0.0758	1275	—	62.0	0.0775
7月15日	6000	7064	98.45	0.0692	1175	—	50.0	0.0635
1960年2月1日	9000	6793	92.85	0.0331	640	—	90.3	0.112
4月4日	10000	6584	88.60	0.0049	230	165	209.	0.255

表 7 列出苏联第三颗人造卫星的轨道根素 a, e, T; 卫星质量1327公斤，形状为圆锥体，底部直径1.33 米，高 3.57 米。表中资料所指的时间间隔里面，每一圈的平均变化 Δa为若干米，ΔT为秒的分数。

我们没有在表里列出准确到天的分数的相应时刻的轨道根素，而是用卫星发射后到某一天的运行圈数N 所对应的轨道根素。表中列出的偏心率的数值可几误差为±0.0005。因此在计算卫星的近地点地心距离，以及近地高度h_p的时候，其误差可能达到±3～4公里。

对于表中头三个日期（5月15～22日，5 月 22～6 月 4 日，6 月 4 日～7 月26日）所列示的ΔT，其可几误差，是因为表中的周期值可能有±0.005分的误差所引起的。

在由观测来决定运动刚开始的T的变化速度时，我们有一些困难。骤然看来，取对于 5 月15～22日这段间隔确定的ΔT是较合理的。在这时间中，根素a，e; h_p变化很小，而得到的平均ΔT，与在1958年 5 月15日中的一圈的周期变化差别不大，这是由于周期值T的观测误差，使得算出来的 ΔT具有较大的误差。在另一方面，如果取1958年 5 月15 日到 7 月26日这一更长间隔，那么，我们得到的平均 $\Delta T\approx 0.0530 \pm 0.0006$秒/圈。误差比较小；但是，这值还只是在该间隔中的一圈的平均变化，这时根素a，e和h_p或多或少有明显变化，很难立即说：什么样的值为最佳。

可以预料到，由于在卫星轨道近地点区段大气密度渐渐增大，因此周期T随着近地点降低而加速减少。事实上，正如由表 7 和图46所提供的Δt值所表明的周期T经历了较复杂的变化。可以这样解释：如上所说，任何高度上的地球大气密度都并不是始终保持稳定的。

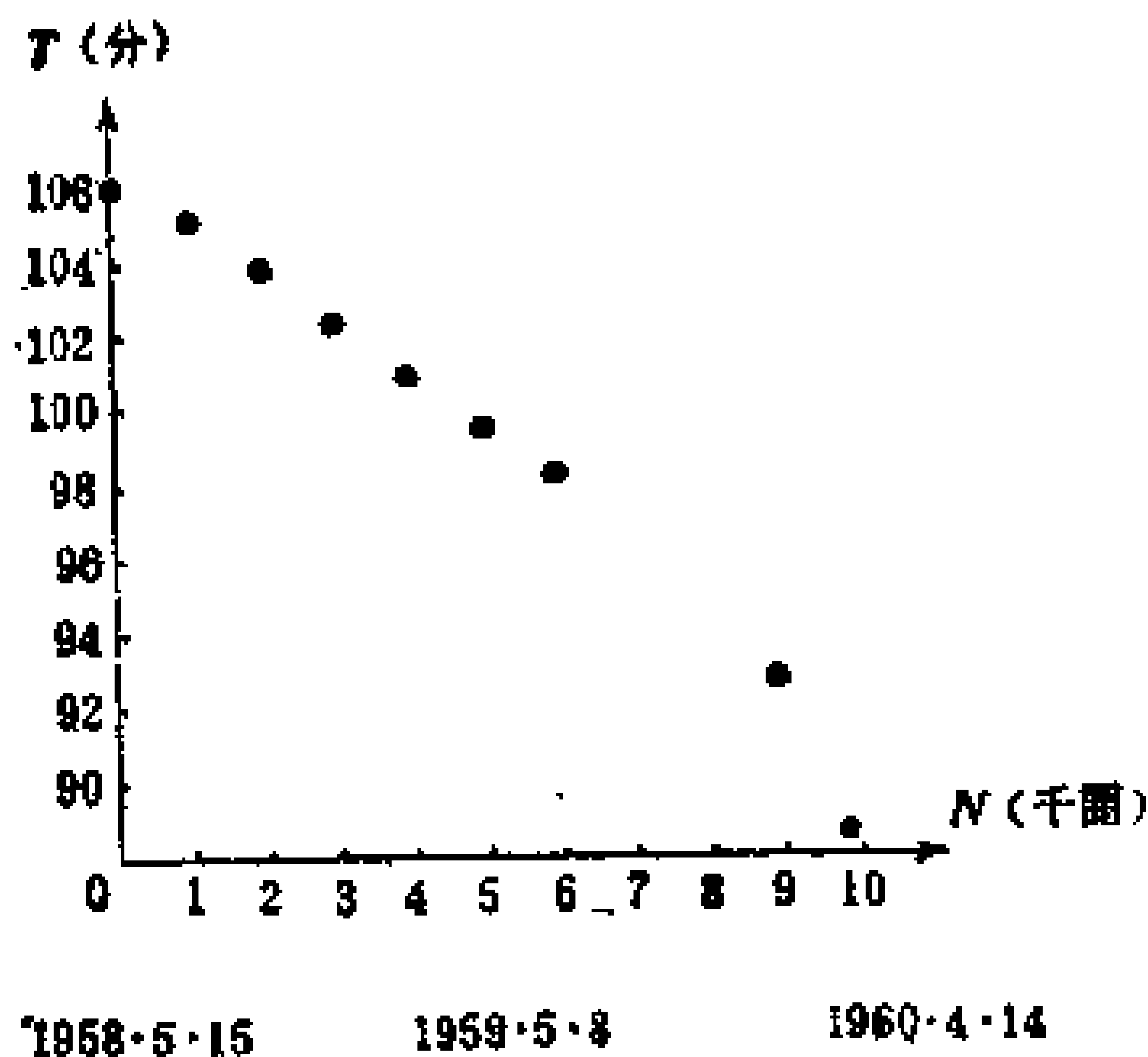


图 46　苏联第三颗人造卫星周期变化图示

人造卫星的存在时间

卫星轨道半长轴和近地点高度h_p逐渐下降，达到150—160公里时，卫星落到这样一种大气层，在那里使长期运动成为不可能，最后卫星“燃烧”而结束自已的寿命。离地面150—160公里高度，对于圆轨道、也即半长轴等于6528—6538公里的卫星来说，其相应周期为87.48至87.68分。

当卫星周期减少至接近指定数值，它应当很快地被“燃烧”掉，卫星运行周期的临界值为87.75分，相应的半长轴等于6541公里（或平均高度离地面163公里）。

这样，人造卫星轨道，即使一部分在阻力影响显著的地球大气层中，亦形成卫星的“寿命”缩短。人造卫星发射时所在的轨道离地面高度越高，卫星的横截负荷越大，它的“寿命”越长，反之亦然。

苏联第一颗人造卫星，在1957年10月4日发射，到1958年1月完成绕地球1350圈。

根据轨道半长轴、偏心率、近地点高度的变化速度，可以算出需要多少时间，卫星的运行周期就达到临界值87.75分，并从而预先确定卫星的大致“寿命”。由于世界各国学者们的一系列工作而得到图表和公式，推算出依赖于运动开始时的轨道参数和横截负荷等的“寿命”期限。

例如：对于卫星，按115页的公式，得到下面的决定自某一瞬间t_0起的卫星“寿命”期限τ的近似公式，以及在此期间的圈数：

$$\tau=\frac{0.75e_0T_0}{(\Delta T_0)_1},\quad N_\tau=\frac{0.75e_0T_0}{\Delta T_0}$$

其中e_0、T_0分别为轨道偏心率和对应于某瞬间t_0的旋转周期。ΔT_0，$(\Delta T_0)_1$分别表示每一圈的周期变化和相应于这瞬间的每昼夜变化。当然，这公式后来得到很大简化；此外，由于不能顾及影响卫星“寿命”期限的许多因素，因而不能利用它得到多么准确的结果。但是，它可以给出关于某个卫星可能存在的期限的概念。

借助第115页公式，量ΔT_0，$(\Delta T_0)_1$可以计算人造卫星理论上的“寿命”期限；或者利用分析式子和实际观测资料的数值结合起来进行计算，这样就能导得更准确结果。

例如：对苏联第一颗人造卫星，得到在运动开始时，也即1957年10月4日的上述量值是：

$e_0=0.0517$　　$T_0=96.17$分$=5770$秒，

$\Delta T_0=0.1169$秒　　$(\Delta T_0)_1=1.75$秒。

这样，按上面公式得到：

$$\tau=\frac{0.75\times0.0517\times5770}{1.75}=128\ （昼夜）$$

$$N_\tau = \frac{0.75 \times 0.0517 \times 5770}{0.1169} = 1914$$

当然，这量与真实值（92天，1350圈）有差别，但还有参考价值。如果在公式中，用10月4日—21日期间观测到的每昼夜变化平均值 $(\Delta T_0)_1 = 2.12$秒/圈（参阅114页），那么就得到：

$$\tau = 105\ (\text{昼夜})$$

$$N_\tau = 1580$$

这与实际值就更接近了。

苏联第三颗人造卫星存在于1958年5月15日到1960年4月6日，绕地球转10030圈。在1958年5月15日开始运行时，$e = 0.1116$，$T = 105.95$分$= 6357$秒，对于每圈轨道周期的减少采用由1958年5月15日—7月26日间隔，观测得到的最可靠数值即$\Delta T = 0.053$秒，这时：

$$N_\tau = \frac{0.75 \times 0.1116 \times 6357}{0.053} \approx 10050,$$

与实际值相当接近。

地球扁度的影响 地球扁度对人造卫星的振动影响，一般说，比大气影响还要大些。实际上，质量$m=1$、位于距离地球中心r而纬度为φ的地面以上的天体，地球的引力约为（限于一阶扁度项）：

$$F = fM\left[\frac{1}{r^2} + \frac{JR^2}{r^4}(1 - 3\sin^2\varphi)\right],$$

其中R为地球赤道半径，J为地球扁度α有关的量，公式为：

$$J = \alpha - 0.0017288。$$

这公式引出地球形状理论，并且考虑到地球为非匀质旋

转体。对于匀质静止球体，$J=\frac{3}{5}\alpha$，并得到第38页所援引的力F公式。

任意质量的地球体的加速度与地球为均质球形时的差值为：

$$\delta W=\frac{fM}{r^4}JR^2(1-3\sin^2\varphi)。$$

令$r=6608$公里（地面高度$h=230$公里），卫星位于赤道平面（$\varphi=0$）。而且对地球扁度α，如前面所说为1/298.26。这时，

$$J=0.0016240,$$

$$\delta W=\frac{3.986\times10^{14}\times6378000^2}{6608000^4}J=0.0138米/秒^2。$$

基本的加速度等于：

$$W_0=\frac{fM}{r^2}=\frac{3.986\times10^{14}}{6608000^2}=9.13米/秒^2。$$

δW与W_0之比为1/662。

在这同时，对横截面积1平方米和质量100公斤的卫星，在$h=230$公里的地球大气中受到的制动，按111页计算为0.021厘米/秒²。这样，该卫星在赤道平面上取决于地球的扁度和质量分布不均匀性的摄动加速度所施的影响，要超出制动的影响约大73倍。

地球扁度的摄动，要比来自大气阻力的摄动要大得多。但是这两种摄动，还并不是引起卫星轨道的巨大变化。摄动是这样的：卫星轨道一般不改变它的大小和形状，可是逐渐地在空间偏转，产生近地点长期进动（在轨道平面上移动）和升交点的长期运动（绕与地轴重合的想象轴偏转）。

联系地球扁度引起的近地点变化$\Delta\omega$和升交点变化$\Delta\Omega$近似式子如下：

$$\Delta\Omega = -J\left(\frac{R}{a}\right)^2\frac{\cos i}{(1-e^2)^2}nt,$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}J\left(\frac{R}{a}\right)^2\frac{5\cos^2 i-1}{(1-e^2)^2}nt。$$

其中R为地球赤道半径；n为卫星平均角运动；i为倾角；a为半长轴；e为轨道偏心率；而$J = \alpha - 0.0017288$。如果$\cos i >$ 0，那就成为极卫星，轨道自东向西飞临两极区。如果$5\cos^2 i - 1 > 0$，即$\cos i > 0.44721$。那么$\Delta\omega > 0$，即近地点作正向移动，（沿人造卫星轨道运动方向）。

除了长期变化之外，近地点和远地点还发生复杂的周期性振荡，但是从数值来看，在任何情况下和相当长的间隔内，它们都要比长期摄动小。

由所列的公式，可以近似地确定任一时间间隔内的$\Delta\Omega$和$\Delta\omega$。例如：苏联第三颗人造卫星1958年5月22日的轨道根素为：$a = 7414$公里，$e = 0.1108$，$i = 65°10'$，$T = 105.87$分。从这些数值求得：

$$\Delta\Omega = -2°.533t，\Delta\omega = -0°.356t。$$

其中t以昼夜表示。经过50昼夜（到1958年7月11日），我们得：$\Delta\Omega = -126°.6$，$\Delta\omega = -17°.8$。而由观测到的在这个时间间隔中的Ω和ω的变化分别为：128°.4和17°.4。

可以提出相反的问题。就是说：借助$\Delta\Omega$和$\Delta\omega$的公式，能够通过观测到的Ω和ω变化来决定量J和α，要注意的是，这时当然还应该考虑到主要是由于大气阻力所致的根素a，e的变化。此外，卫星轨道近地点的运动计及地球大气的阻力，同样产生附加的困难。原因在于：轨道近地点所在纬度以及

近地点离地面高度，由于地球扁度而发生变化；同时，在轨道近地点附近的大气密度也发生变更。所有这些因素决定了a，e的长期摄动。

例如，假设卫星轨道通过地球极区，在这情况下，卫星运行的轨道完全保持本来的大小和形状，那么，在卫星轨道近地点自赤道上空转移90°到极区上空时，近地点地面高度也只变化21公里。所以，利用那种轨道根素a、e变化尽可能少、也就是在离地面较远、大气阻力影响小的轨道上运动的卫星来确定地球扁度是很方便的。

正是观测人造卫星可以决定充分准确的地球扁度，因而其效果远比以前的大地测量和重力测量得到的要准确得多。

太阳光压的影响 光压对在500—600公里以上高度、大而轻的人造气球卫星有重要影响，对横截面积为S、位于距离太阳为Δ个天文单位的卫星、这个压力的数值等于：

$$F \approx 5.10^{-5}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2 S\text{达因/厘米}^2。$$

摄动加速度等于$\delta W = F/m$。这里m为卫星质量。

例如，对《回声一号》（直径30米，质量68公斤），有$\Delta \approx 1$，因而：

$$F \approx 5 \cdot (1500)^2 \pi \cdot 10^{-5} \approx 353\text{达因}$$

$$\delta W \approx 0.005\text{厘米/秒}^2$$

这个作用力，比地球扁度引起的摄动加速度来得小；而比起近地卫星受到大气阻力所产生的摄动加速度要小得多。但是，毕竟太阳光压产生明显的周期摄动，特别是近地和远地点高度的振动。

我们列举人造卫星的主要摄动。在准确地研究它的运动时，应该考虑很多较小的摄动。它们是：由于地球引力的复

杂性，如来自章动和岁差引起的地球赤道面移动，电磁力（因为地球具有磁场）等等的作用。

19、人造天体在行星际空间的运动

现在转到讨论宇宙飞行器飞向其它行星和月球的运动问题。它们通常称为自动行星际站。到目前为止，美国发射的自动行星际站已超过100个。

宇宙飞行器在它进入围绕地球（地心的轨道）时的速度v_0越大，轨道越拉长，它的离心率、半长轴和远地点同时增加。最终，当速度v_0等于抛物线速度或更大时，那么，人造天体就永远离开地球作抛物线或双曲线轨道运动。

与地心距离为r的抛物线速度按下列公式计算：

$$v_{抛}=\sqrt{\frac{2fM}{r}},$$

即在某一给定高度上，抛物线轨道速度比圆轨道速度大$\sqrt{2}$倍。上式可写为更方便形式：

$$v_{抛}=11.180\sqrt{\frac{R}{r}}公里/秒。$$

其中11.180公里/秒是在离地心为一个赤道半径R＝6378公里的抛物线速度，而对于离地面为100公里(r＝6478公里)的高度，$v_{抛}$＝11.093公里/秒；在高为200公里处，$v_{抛}$＝11.009公里/秒等等。抛物线速度称为第二宇宙速度。

在分析行星际站围绕地心的运动的时候，存在能量积分；当行星际站位于离地心为r这一时刻，其地心速度为：

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + h,$$

h为能量常数。如果已知某一时刻行星际站的v和r；例如：在进入地心轨道的时刻，在地球上测量（用无线电定位方位）该行星际站的距离和它的速度，那么，我们能够计算该轨道的h值。此后，按得到的h值又可以计算对于任何距离r的v值；反之，如果已知某时刻的速度v，那就可以计算r。随着r增大，即行星际站离开地球，速度v减少。

如果行星际站的初始地心速度（在进入轨道时刻）小于抛物线速度，也就是只及椭圆速度，那么$h<0$；如果这速度为抛物线速度，那么$h=0$；而如果它比抛物线速度大，就是双曲线速度，那么$h>0$。

由此可知：确定行星际站按抛物线或双曲线轨道运行，永远离开地球，是带有假定的性质。问题在于：这是指行星际站运行在抛物线或双曲线的区段上（不考虑摄动）直到它离开地球附近的时候为止。但是，当行星际站离开地球相当大距离时，地球引力作用就变小；而行星际站以后的运动，就受到太阳引力的影响。所谓行星际站摆脱地球引力场（或称作用球），这不是说地球不再吸引它，而是说地球引力对行星际站的运动不再起优势的影响；此后行星际站的运动主要决定于太阳的引力。地球引力作用球的半径约为930,000公里；在这作用球的边界处，太阳和地球对行星际站的作用相等。

在行星际站进入地球作用球边界时，被算作是它进入日心轨道（绕太阳运动的轨道）的时刻。如果行星际站不可控的话，那么，这轨道完全由行星际站的位置和这时刻的日心速度决定。

在图47，地球位于O点，行星际站在某时刻t_1到达地球

引力作用球的边界P点；而v_1为行星际站相对于地球(地心)的速度。如果地球本身在轨道上的日心速度为V_0，那么行星际站的日心速度表为V，它等于v_1和V_0的几何和，即由平行四边形法则决定。

以一级近似来研究行星际站的无摄日心轨道。这个轨道完全由行星际站在时刻t_1与太阳的距离和日心速度V来决定。

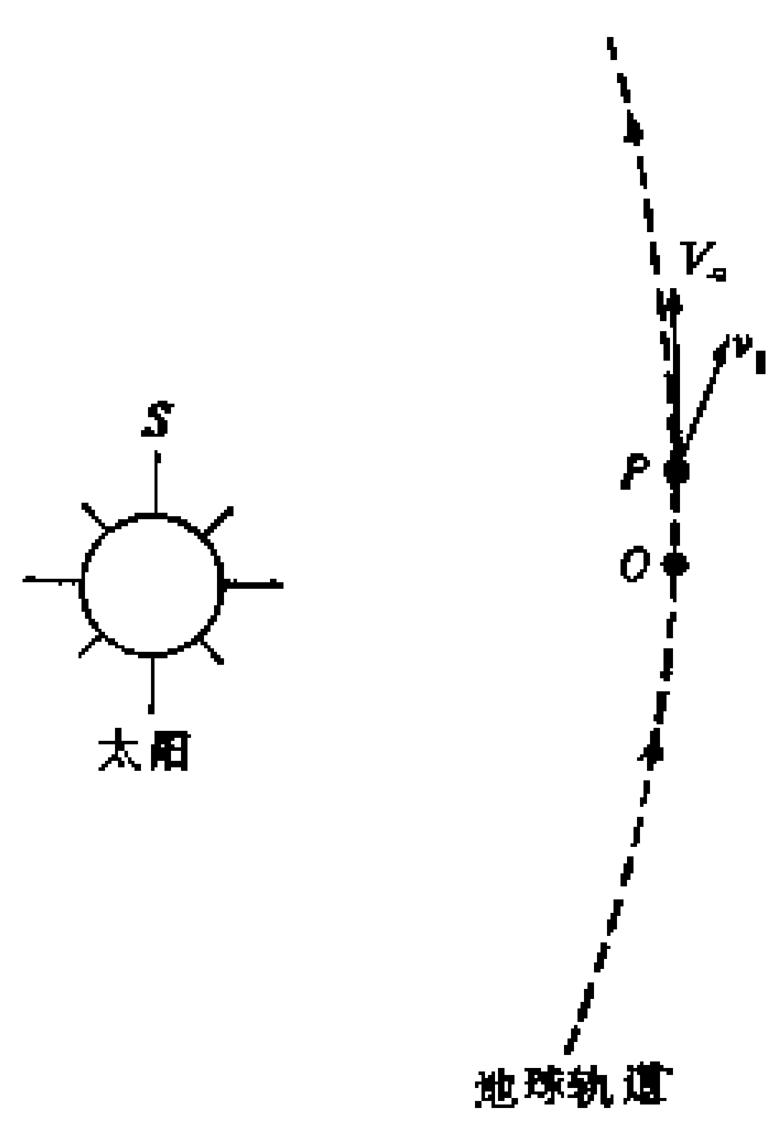


图 47　行星际站(在P)于某瞬间进入日心轨道

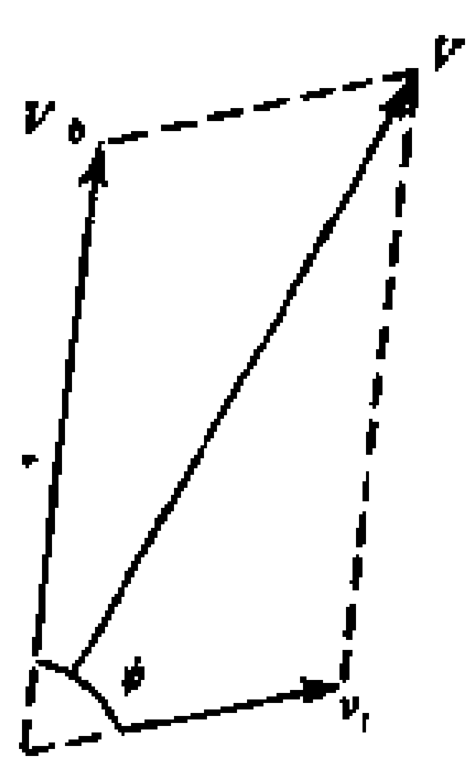


图 48　V_0和V_1速度的平行四边形合成

在离太阳为r_s处的日心抛物线速度等于：

$$V_{抛}=\sqrt{\frac{2fM_s}{r_s}}$$

其中M_s为太阳质量。如果取太阳质量为1，以天文单位作为距离单位；而时间以平太阳日（准确说为历书日），那么，$f=0.000295912208$；而

$$V_{抛} = \sqrt{\frac{2f}{r_S}} = \frac{0.024327442}{\sqrt{r_S}}\text{天文单位/日} \doteq \frac{42.12}{\sqrt{r_S}}$$

公里/秒。

地球的作用球半径（930000公里）比一个天文单位小很多。所以行星际站在地球引力作用球边界$r_S \doteq 1$时，有：

$$V_{抛} = 42.12\text{公里/秒。}$$

这样，如果行星际站离地球930,000公里，具有日心速度$V < 42.12$公里，那么，它在以后将沿椭圆轨道绕太阳运动，成为太阳系的一颗人造小行星。

直到目前，所有射往行星的行星际站，在进入日心轨道的时候，都具有上面所说的速度。但是，可以提出理论问题：应当以什么样的地心速度v_0使行星际站进入绕地轨道，才能使它达到离地球930,000公里处，并具有等于42.12公里/秒以上的日心速度呢？这时行星际站进入绕太阳的抛物线或双曲线轨道，并进入星际空间，脱离太阳系了。

为了确定速度v_0，先计算地球绕太阳运动的日心速度V_0，可以近似地认为：地球在半径为一个天文单位的圆上运动。因而按圆运动公式，速度为：

$$V_0 = \left(\sqrt{\frac{fM_S}{r_S}}\right)_{r_S = 1,\ M_S = 1} = 0.01720209895\text{天文单位/日} \doteq 29.786\text{公里/秒。}$$

对于同一个地心速度v_1，我们得到当行星际站在进入日心轨道的时刻，与地球同向运动，那么得到最大的日心速度$\overline{V}$，即$\overline{V} = V_0 + v_1$。如果$\overline{V} = 42.12$公里/秒，那么$v_1 = \overline{V} - V_0 = 12.33$公里/秒。这应该就是在离地球930,000公里处的地心速度。

现在，借助于能量积分计算，求行星际站在进入绕地轨

道，例如在离地面高度为200公里（$r_0=6578$公里）时的地心速度，我们有关系式：

$$v^2=\frac{2fM}{r}+h。$$

以及在$r=930,000$公里处，$v=v_1=12.33$公里/秒。如果距离以公里表示，那么$fM=3.986005\times10^5$，而$h=151.17$。

现在，假定$r=r_0=6578$公里得：

$$v=v_0=\sqrt{\frac{2fM}{6578}+151.17}=16.50\text{公里/秒。}$$

这是离地面200公里高度的最小地心速度的近似值；因我们以地球作圆轨道运动。这时行星际站可以达到地球引力作用球边界，进入日心抛物线轨道。这个速度，称为在给定的地面高度的**第三宇宙速度**。

当然，要准确计算行星际站的轨迹，必须考虑其它行星、月亮的引力和考察行星际站的受摄运动。以上所得的速度值，仅作为粗略理解之用。

飞向行星的运动轨道。在向其它行星发射行星际站时，可以作如下考虑。

首先，行星际站进入绕地轨道的时候的地心速度，应该超过第二宇宙速度。第二，行星际站的日心轨道应该与行星轨道相交。第三，发射的时刻，应该选择使飞行期限、燃料消耗等一系列要求上来看都是最有利（最佳）轨道。

行星际站轨道的近似计算可以这样进行：在地球引力作用球之内，行星际站只在地球引力作用下，对地心作开普勒轨道运动，而出了作用球以后，只在太阳引力作用下沿开普勒日心轨道运动。

行星际轨道的重要的一种就是动力学最佳轨迹(或轨

道），也即这种轨道对应于行星际站到达地球作用球边界时刻的最小的地心速度。在图49中给出飞向火星的一种轨道；它基于这样的假设：地球和火星的轨道，以等于它们的轨道半长轴（分别是$a_{地}=149.6$百万公里和$a_{火}=227.9$百万公里）为旋转半径，并处于同一平面上。这轨道联结地球和火星。这种轨道称为霍曼轨道；它以从事行星际飞行研究的德国天文学家霍曼命名。

图49中黑粗线表示行星际站绕太阳的整个轨道的一半。在时刻t_0，地球位于1、行星际站的位置在地球引力作用球的边界上。在这图中无法与地球位置区别开来。记行星际站的日心速度为V，它的方向与地球的日心速度V_0相同（与地球轨道相切）。

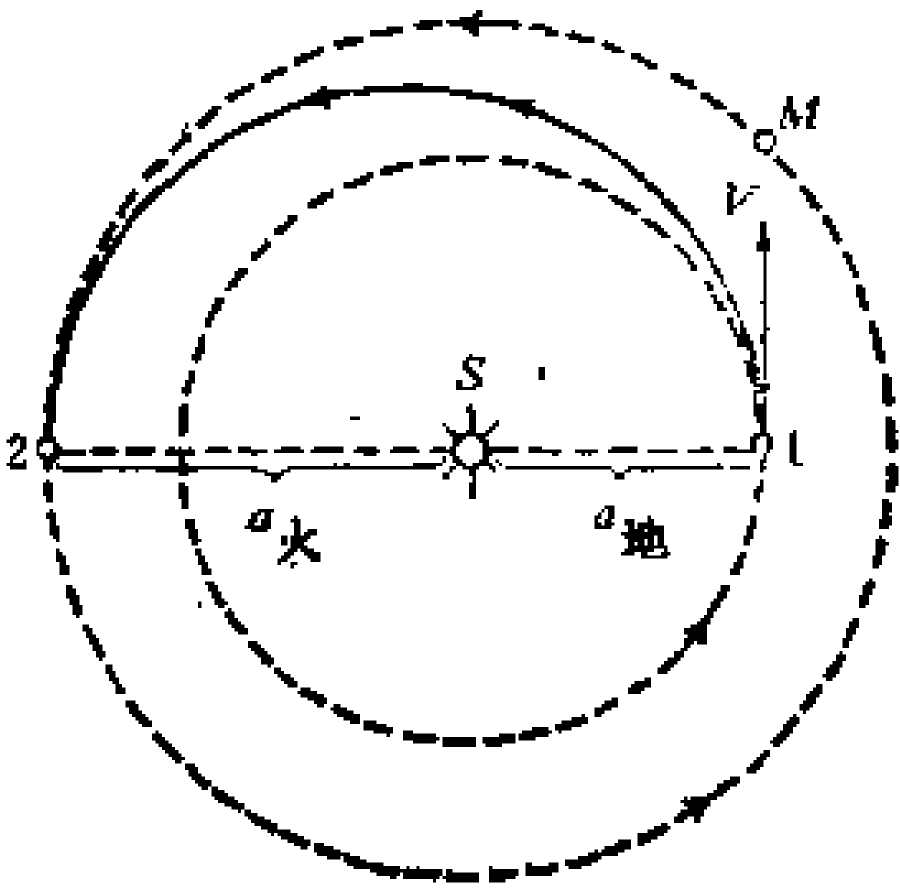


图 49　飞向火星的霍曼轨道

速度V对应于远日点在火星轨道点2上、近日点在地球轨道点1上的日心轨道。这样，$r_A=a_{火}=227.9$百万公里，而$r_P=a_{地}=149.6$百万公里。这轨道的半长轴$a=(a_{地}+a_{火})\div 2=188.75$百万公里。由于我们假定地球按圆轨道运动，$V_0$为距离太阳为$a_{地}$处的圆轨道速度。因此，按联系V，$V_0$，$a$和e的公式，得到：

$$a=\frac{a_{地}}{2-\left(\dfrac{V}{V_0}\right)^2}\qquad e=\left(\frac{V}{V_0}\right)^2-1\ .$$

远日点距离r_A对于该轨道，按公式$r_A = a(1+e)$表示，而且由于$r_A = a_{火}$，因此可以采用下列公式联系 V、V_0、$a_{地}$、$a_{火}$各量得：

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = \frac{2}{1+\frac{a_{地}}{a_{火}}}。$$

假设：$V_0 = 29.786$公里/秒，得$V = 32.7296$公里/秒。相应地，行星际站的地心速度等于：$v_1 = V - V_0 = 2.9436$公里/秒。

沿这种轨道的公转周期，按开普勒第三定律等于：

$$T = T_0\left(\frac{a}{a_{地}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

其中T_0为地球公转周期（=365.256日）。由前面指出的a和$a_{地}$得到$T = 518$天，这样这周期的一半为259天，就是沿上述轨迹地球到火星的飞行时间（不计及飞到地球引力作用球边界的较短时间）。

发射的时刻应该这样选择，使行星际站和火星站在各自的轨道运动，而同时到达点2。这就是火星在点M的时刻。火星在自己的轨道上由M到2这一段大约要过259天。

现在计算行星际站进入轨道的时候对地球的地心速度。我们再次应用能量积分。在$v_1 = 2.94$公里/秒，而地心距$r_1 = 930,000$公里的时候有：

$$h = \overline{v}_1^2 - \frac{2fM}{r_1} = 7.80758。$$

例如，在地面高度200公里处（$r_0 = 6578$公里），得到下列速度：

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{2fM}{r_0} + h} \approx 11.3578\text{公里/秒}。$$

这速度超过在这个高度的抛物线速度（11.009公里/秒），大约350米/秒。

还可以选择飞往火星椭圆轨道的更有利的发射时刻，以便它的近日点与点2重合；这就是地球与火星轨道的近日点同时处在太阳两侧的时刻。对于偏心率$e = 0.0934$的火星轨道，近日距约等于206.6百万公里，因而行星际站的霍曼轨道应该有近日距$r_P = 149.6$百万公里，远日距$r_A = 206.6$百万公里，而半长轴$a = 178.1$百万公里。只是$a_火$在206.6百万公里时，不同于前面的优点才是明显的；这使行星际站在进入地心轨道的时候，达到11.21公里/秒的速度（超过抛物线速度约200米/秒），而使穿越时间达到237天，这样好处就完全可以看出来。

用类似的方式，可以研究飞往金星的霍曼轨道，再次假定地球和金星的轨道为圆，并处在同一平面（图50），它们的半径分别为$a_地 = 149.6$百万公里，$a_金 = 108.2$百万公里。在时刻t_0，地球位置标在图上1点，而金星位置标在B点。考虑行星际站在这时刻到达地球引力作用球边界，它的位置在图上无法与地球位置区别。粗线表示行星际站绕太阳整个轨道的一半。这

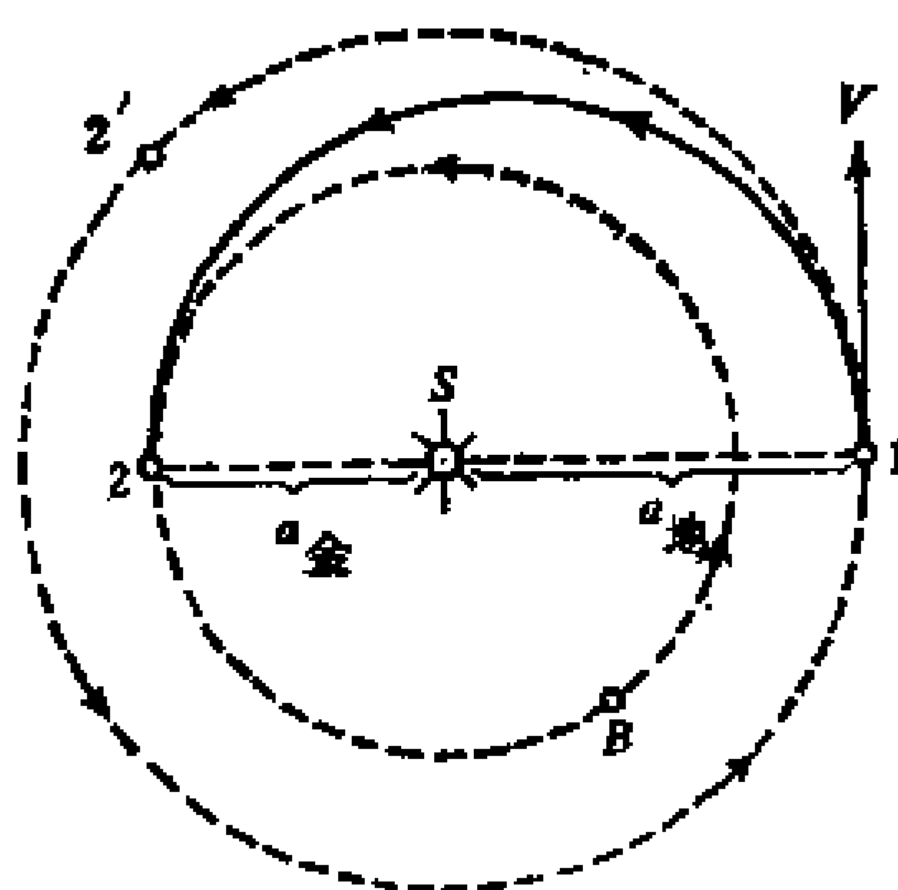


图 50　飞向金星的霍曼轨道

轨道与金星和地球的轨道相切；因而有远日点距离$r_A = a_{地}$，近日点距离$r_P = a_{金}$和半长轴$a = \frac{1}{2}(a_{地} + a_{金}) = 128.9$百万公里。

行星际站的日心速度表为V；它的方向与地球运动速度V_0（等于29.786公里/秒）相同。由于这时点1是霍曼轨道的远日点，因此，在V小于这一点的圆周速度也即小于V_0。因而，宇宙飞行器的地心速度v_1方向与V_0正好相反，而有$v_1 = V_0 - V$；联系V，V_0，$a_{地}$、$a_{金}$的公式，与上述火星情况比较是保持不变的（只要将$a_{火}$换成$a_{金}$），但是：

$$e = 1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2。$$

计算V，v_1和速度v_0（行星际站在高度200公里进入地心轨道的速度），并考虑上面提到的$a_{地}$、$a_{金}$、V_0数值是精确的。我们得到：

$V = 27.289737$公里/秒，$v_0 = 11.250155$公里/秒，

$v_1 = 2.496263$公里/秒，$T = 292.132$日。

并且我们又计算沿该轨道的公转周期T。这轨道周期的一半也就是146.066日，等于行星际站飞向金星的时间。行星际站在时刻t_0进入日心轨道后，经过这一间隔，它与金星同时达到预定点2。地球在这时刻位于自己轨道上的点2′处。从金星的公转周期等于224.701天和沿轨道运行的角速度为1°.6/日出发，还可以计算在时刻t_0，金星应当占哪个位置。

在该情况下，霍曼轨迹的缺点，包括：(1)飞越期限比较长，(2)在行星际站与金星可能交会的时刻，地球离行星际站十分远，大约有9千万公里（如图51上点2和2′之间距离）。这对观测站与行星际站之间的无线电联络是不便

的。在图面上描绘的飞向金星轨迹，从初速度、飞越时间和在行星际站与金星交会时刻地球与金星的距离来看，都是最有利的。行星际站进入轨道时刻的地心速度v_0，在这种情况下等于3.44公里/秒，这是不大的（对于霍曼轨道，只比速度v_0超过0.90公里/秒）。飞越期限约105天，而在行星际站与金星相遇的时刻，它与地球的距离仅7千万公里。速度v_1的大概方向如图所示。

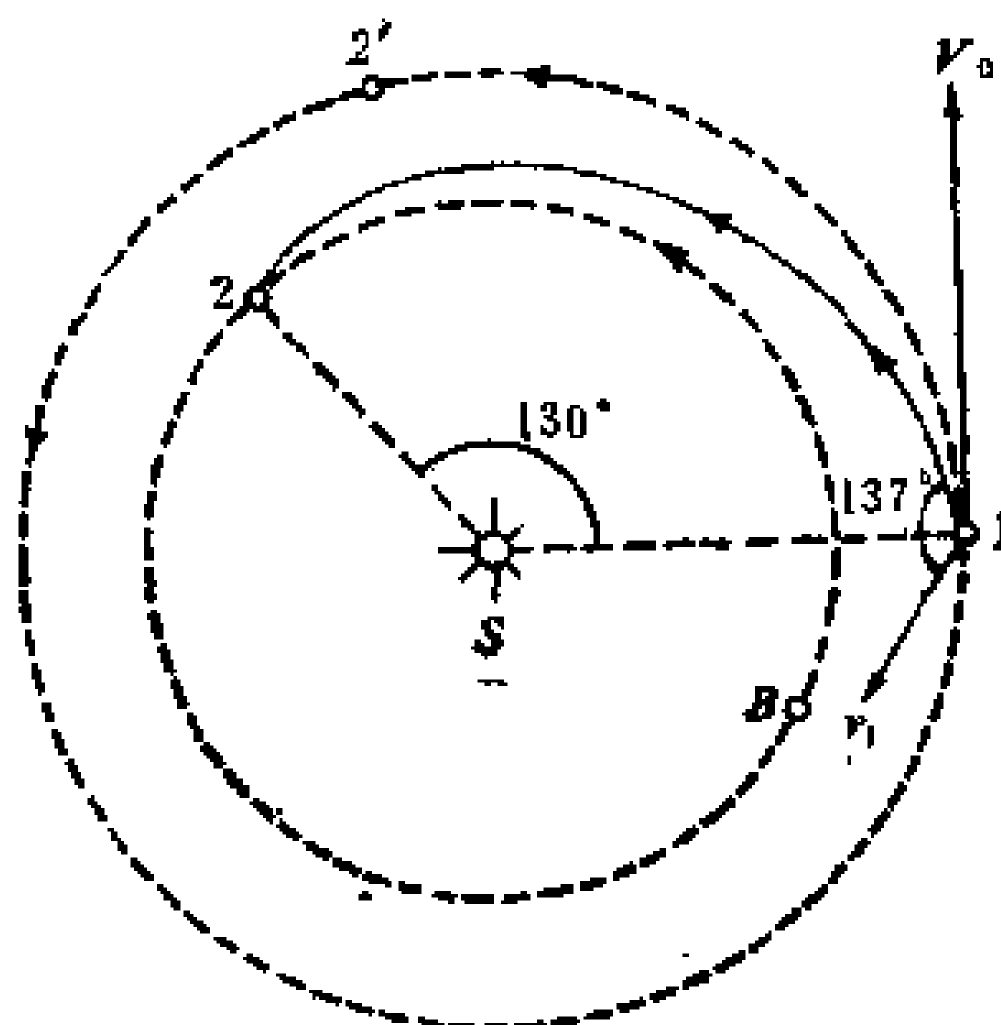


图 51　行星际站《金星—2》号飞向金星的轨道

事实上，苏联于1965年11月发射的行星际站《金星-2》号和《金星-3》号以及苏联和美国的发射往金星的一系列行星际站的运动，其轨道都采用外切。

当然，采取的轨迹设计是极为近似的，仅仅给出关于行星际航行轨迹的一般概念。在进行实际轨迹计算的时候，要研究和考虑到与无振动椭圆运动的区别；也就是行星际站的真实轨道以及轨道倾角等等。在分析行星际站轨道的初速度时，还须考虑到太阳、地球、月亮、其它行星等的引力对整

个轨迹的影响。

为了保证行星际站能按设计的轨道飞行，轨道速度的准确是重要问题。例如：按通常的上述金星和地球轨道图式，研究行星际站以霍曼轨道飞往金星的情况。采用v_0=11.250155公里/秒作为行星际站在离地心6578公里的距离上进入地心轨道的时候的准确的计算值。假定这速度方向精确地与霍曼轨迹相符合。我们认为：上面引用的$a_{地}$、$a_{金}$、V_0是准确的，并按公式将预定轨道的远日点距离r_P和周期T的一半的数值分别计算到1公里和0.0001日的准确度。我们得：

r_P=108.2000百万公里，　$\frac{T}{2}$=146.0660日。

现在对(1)v_0=11.2501公里/秒和(2)v_0=11.249公里/秒两种情况计算r_P和$\frac{T}{2}$，我们得：

(1)r_P=108.2033百万公里，　$\frac{T}{2}$=146.0689日

(2)r_P=108.2712百万公里，　$\frac{T}{2}$=146.1266日

这数字说明：如果行星际站进入地心轨道时刻的速度，只要与预定速度差0.000055公里/秒=5.5厘米/秒，那么，它到达远日点要“迟到”0.0029日，而这时与计算的同金星相遇点要相差0.0033百万公里=3300公里。金星以每秒35.022公里的速度运动。这样，每0.0029日，离开预定的同行星际站相遇点约8700公里。一般来说，行星际站到金星的偏差为9000公里。这是由于行星际站初速度与设计的误差仅仅相差5.5厘米/秒所造成的“脱靶”值。

如果初速度v_0误差等于1.155米/秒（第二方案），那么，

行星际站的“迟到”量为0.0606日，与设计的同金星相遇点偏离0.0712百万公里，而“脱靶”值约190000公里。

同样，行星际站的初速度在方向上与预定值的微小偏差，也会引起麻烦。

对于按霍曼轨迹飞向火星的情况，初速度误差引起的“脱靶”量要更大些。当然，我们只是近似地计算。在详细分析时，就要研究行星际站的真轨迹，要考虑到前面提到的一切因素，但是，对任何初速度误差，这些因素都加考虑，也未必能减少“脱靶”值。

类似的数量级1米/秒的速度误差（即速度本身数值的0.01%），以及不大的速度方向误差，实际上在发射时是不可避免的。因而在发射之后进行的对行星际站的飞行轨道修正有重要意义。为此目的，在行星际站上安装了不大的火箭发动机。它能通过遥控按地面上的指令在短时间（几十秒）开动。这时行星际站得到附加的冲量，也即附加的加速度，使它改变轨道，为了完成轨道修正，需要首先通过观测来确定行星际站的实际轨道与设计轨道的偏差，然后应从理论上计算出该在什么时刻对行星际站的速度和方向作多少变更，以便行星际站转移到必需的轨道。

为了增加行星际站进入地心抛物线或双曲线轨道的速度的准确性，即为了减少以后的修正量，往往先使行星际站进入过渡性的起始轨道，也就是先使运载火箭的最后一级带着被发射的行星际站进入地球卫星(较低的)轨道。然后在特定时刻，火箭发动机按来自地球的指令开动，火箭达到预定的速度使行星际站进入地心轨道，而离开地球引力作用球。在这种情况下，行星际站从重型卫星上或从近地轨道起航，用这种起航方式，能达到相当高的准确的初始速度和选择更为

方便的发射时刻。

至此，我们讨论了作为飞往行星的轨迹的行星际航行轨迹。可是，在发射行星际站的时候，不一定直接承担飞往某个行星的任务。行星际站的发射，多半是使它接近行星，并借助于装在行星际站上的仪器，在最接近行星的时候进行行星摄影、行星磁场测量和其它研究。也就是说，在这情况下，行星际站是在航行轨迹上运动。《金星-1》号、《金星-2》号；《火星-1》号，《水手-2》号，《水手-4》号和其它的行星际站的轨迹，就是这样。

苏联行星际站《火星-1》号于1962年11月1日发射，没有安置改正发动机；经过225昼夜航行，达到距离火星约197,000公里处，这说明发射是极为准确的，美国行星际站《水手-4》发射于1964年11月28日；作了航行改正，经过241昼夜，于1965年7月15日，飞临离火星表面以上9850公里处。

苏联行星际站《金星-3》号，于1965年11月16日发射，飞行中作了修正，使行星际站直接到达金星表面。实际上这是沿“着陆轨道”飞往行星。

行星际站的航行轨迹，从天体力学的观点来看，是很有趣的。因为它可以测定行星质量。如果行星际站足够靠近行星，那么，来自行星的引力就导致它的轨道变化。这是可以观测到的。按与行星质量有关的这些变化的大小，可以确定这质量的新值，与现行值相比较。例如：《水手-4》得到火星质量的新值$\left(\frac{1}{m}=3098714\pm5\text{，代替}\frac{1}{m}=3093500\right)$。这是最近才测定的。

可以提出关于建立行星的人造卫星问题。当行星际站起初发射到飞行轨道的时候，借助修正使它足够靠近行星。例

如：1971年5月发射《火星-2》号行星际站的轨迹，在火星表面以上1380公里的距离上经过。然后，当它飞近火星并超过火星的时候，开动喷气发动机来制动行星际站的运动。行星际站速度减少，再转移到行星卫星的轨道上去。用这样的方法，使《火星-2》号于1971年11月27日，转入火星的卫星轨道与火星表面最小距离约1380公里。在两个星期以前（1971年11月13日），《水手-9》行星际站经进入火星的卫星轨道上。（有关行星际站转移到卫星轨道的详细原理，参看下章）。

在当前，已经将行星际站发射往更远的行星水星。美国行星际站《先驱者-10》号，发射于1972年3月3日；1973年12月3日接近木星，距离木星表面130,000公里。计算表明，木星对行星际站的影响极大。这时行星际站被加速到这种地步，以致它马上飞向土星和天王星的轨道。《水手-10》号在1973年射入近日点约为46百万公里的日心轨道。在此后两年中有三次接近水星，并且在1975年3月16日，它飞临距水星表面仅320公里的距离。

最有趣的是1978—1980年将行星际站射入飞临木星、土星、天王星和海王星的所谓〈大旅行〉的行星际航行。

向月飞行　这种向月飞行轨迹在其它人造天体轨迹中占据独特地位。因为月球运行于地球引力作用球之内，平均距离为384400公里。目前，只有头几个行星际站按双曲线地心轨道向月飞行的。《月球-1》号行星际站于1959年1月2日发射之后，经过34小时飞临离月球表面为5—6千公里处，继续运行成为第一颗进入日心轨道的人造天体。《月球-2》号发射于1959年9月12日，沿双曲线轨迹降落，经过39小时到达月球表面。

但是，对于向月飞行的轨道，是一个拉得扁长的椭圆轨

道。这种飞行可以绕过月球（飞绕轨迹）或接近月球和转回来，所谓向后（飞临轨迹）航行。所以，按本质来说，按这种轨迹飞向月球的宇宙飞行器，并非行星际站。但是它在这种轨道上受到月球的决定性影响，也即月球吸引着宇宙飞行器。由此可见它有许多特点：在向月飞行情况下，我们遇到介于行星际轨道和卫星轨道之间的特殊类型轨道。

飞绕和飞临轨道的方案是多种多样的。从天体力学的观点来看是有趣的。飞绕轨道是通过月球卫星的轨道在月球着陆以及行星际站和载人飞船自月球或自近月轨道起飞，回归到地球。一句话，向月飞行，在月球着陆，绕月飞行以及由月球返回地球的飞行，这是天文动力学的内容。

我们研究一个类似苏联的行星际站：《探测器5》和《探测器6》沿着月球飞行的飞绕轨道的例子。这两个当中的第一个发射于1968年9月15日。它作为重型的地球卫星，先射到高度距地面200公里的近圆轨道上开始飞行。设计的轨道选择与月球运动平面几乎垂直，而起始速度相应于远地点距离在月球轨道范围内。要选择一个合适的起航时刻，以便月球和行星际站沿着各自的轨道运行，并在行星际站到达自己的远地点时，和月球靠近。

我们来作某种模拟计算。假设：行星际站准确地从距离地心$r_0=6578$公里处起航，而月球按半径为384400的圆轨道运动。

例如预定的远地点距离$r_A=391900$公里（也即要求设计的行星际站轨道远地点在月球轨道旁边7500公里）。由前面98页公式得出，如果v_k表示在距离r_0处的圆周速度，那么对于距离r_A的宇宙飞行器的地心速度v_0等于：

$$v_0 = v_K\sqrt{\frac{2r_A}{r_0+r_A}}$$

在取r_0,r_A的值代入后得：v_0=10.917474 公里/秒。这时的轨道半长轴和偏心率分别等于a=199239 公里，e=0.9669842；沿这轨道运动的周期为9.78天；因此，飞行到远地点的时间为4.89天。行星际站运动速度随远离地球而减少；而在远地点大约仅有170米/秒（我们利用能量积分求得这个数值）。为了保证行星际站能逼近月球，要求月球和行星际站轨道远地点方向间的角距离大约等于66°时，行星际站起航。

假设行星际站起始速度的数值误差为±0.5米/秒（v_0的0.005%）、方向误差为±10′。而实际轨道的远地点可能偏离设计位置在2000公里以上。要求起始速度达到这样的准确性，实际上未必可行。所以，对在给定距离上飞绕月球，必须作适当的预定轨道修正。例如，在《探测器5》号的情况，这时，它处在地球外325000公里距离处，相应速度是671米/秒。假设通过对行星际站的观测查明，实际轨道远地点距离比设计的大2000公里。那就可以认为：修正装置应该给予行星际站附加的加速度W，方向与行星际站速度间夹角约为100°；大小为54米/秒。在这情况下行星际站此后的运动，如果不考虑月球的引力，那就沿改变的椭圆轨道进行；对这轨道远地点距离减少到2000公里，而远地点回到预算点。速度修正本身还有误差。如果这误差大小不超过±0.5米/秒，方向不超过±1°，那么，可能的远地点偏差就在±300公里的范围内。这已经是不大的量了。

在计算实际飞绕轨道的时候，应该考虑月球的引力。当行星际站接近月球少于66000公里时，也就是说它已进入月球引力作用球之内。在这作用球内，行星际站的运动主要由

月球决定。因此，要研究的就不是行星际站的地心（对地）运动，而是月心运动。行星际站的月心速度等于它的地心速度和月球在轨道的运动速度（约1.02公里/秒）的几何和。当行星际站到达月球引力球边界时，具有地心速度约为0.2公里/秒（按能量积分计算）。首先由此得出结论：行星际站无论如何，不能"赶上"月球。它只能在某一方向迎着月球运动，而行星际站的月心速度，在所有情况下，都大于1.02公里/秒。但是，计算指出（见下文），在与月球距离66000公里处，绕月的抛物线速度大约是0.38公里/秒。所以当行星际站进入月球引力作用球边界时，具有月心双曲线速度。因此，随后行星际站沿相对于月球的双曲线轨道的区段运动。月球使行星际站"弯"向自己，并使它的速度增加（与沿无摄动的地心轨道速度相比）。在考察的例子中，如计算所指出：月球引力导致行星际站和月球之间的最小距离减少到大约为3500公里（代替7500公里的预定值），而行星际站速度增加相当可观，在逼近月球时，约为1公里/秒。随后，在绕过月球并飞出作用球之后，行星际站又沿相对于地球的椭圆轨道运动，但是大大地改变轨道根素，特别是半长轴几乎减少1.5倍。

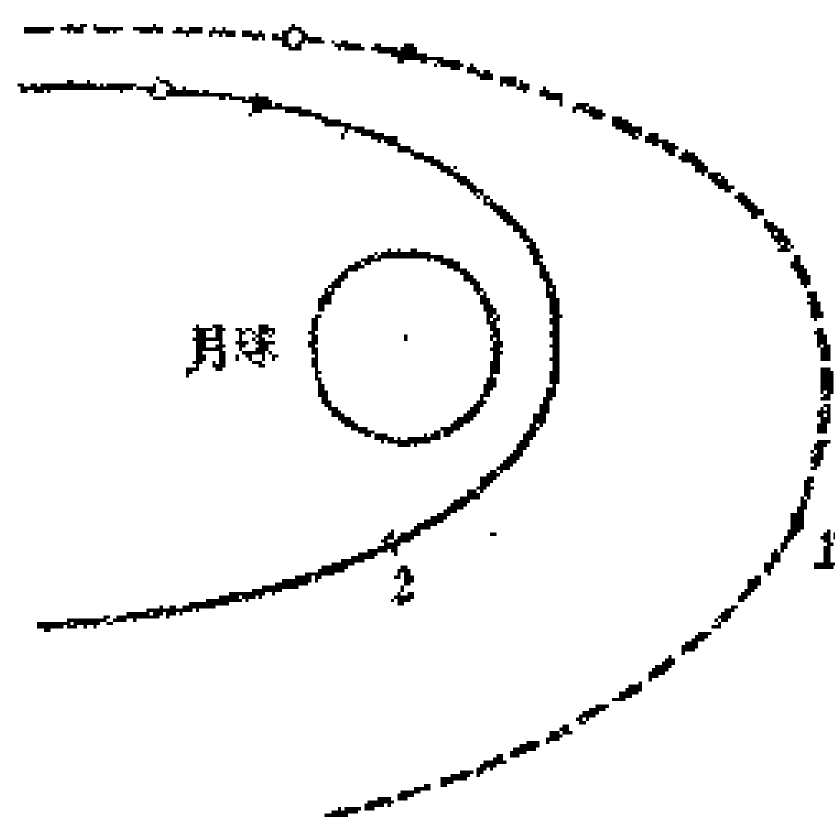


图 52 1.不计及月球吸引的行星际站地心椭圆轨道
2.实际的逼近月球轨道

对行星际站《探测器-5》的轨迹的其它特性，就不详述

了。与之有关的是行星际站回归地球的问题，这还要求从月球到地球的回归路途上再作一次轨道修正；以后行星际站进入与地球表面适当距离的轨道上，这就可以在地球大气中实现行星际站的所谓弹道降落。

如果装在行星际站上的喷射发动机在必要的时刻使行星际站减速到适当程度，那么，就使行星际站能够从飞绕轨迹转移到月球卫星轨道上。我们以1966年3月31日发射的《月球-10》号行星际站为例来研究这种转移图式。

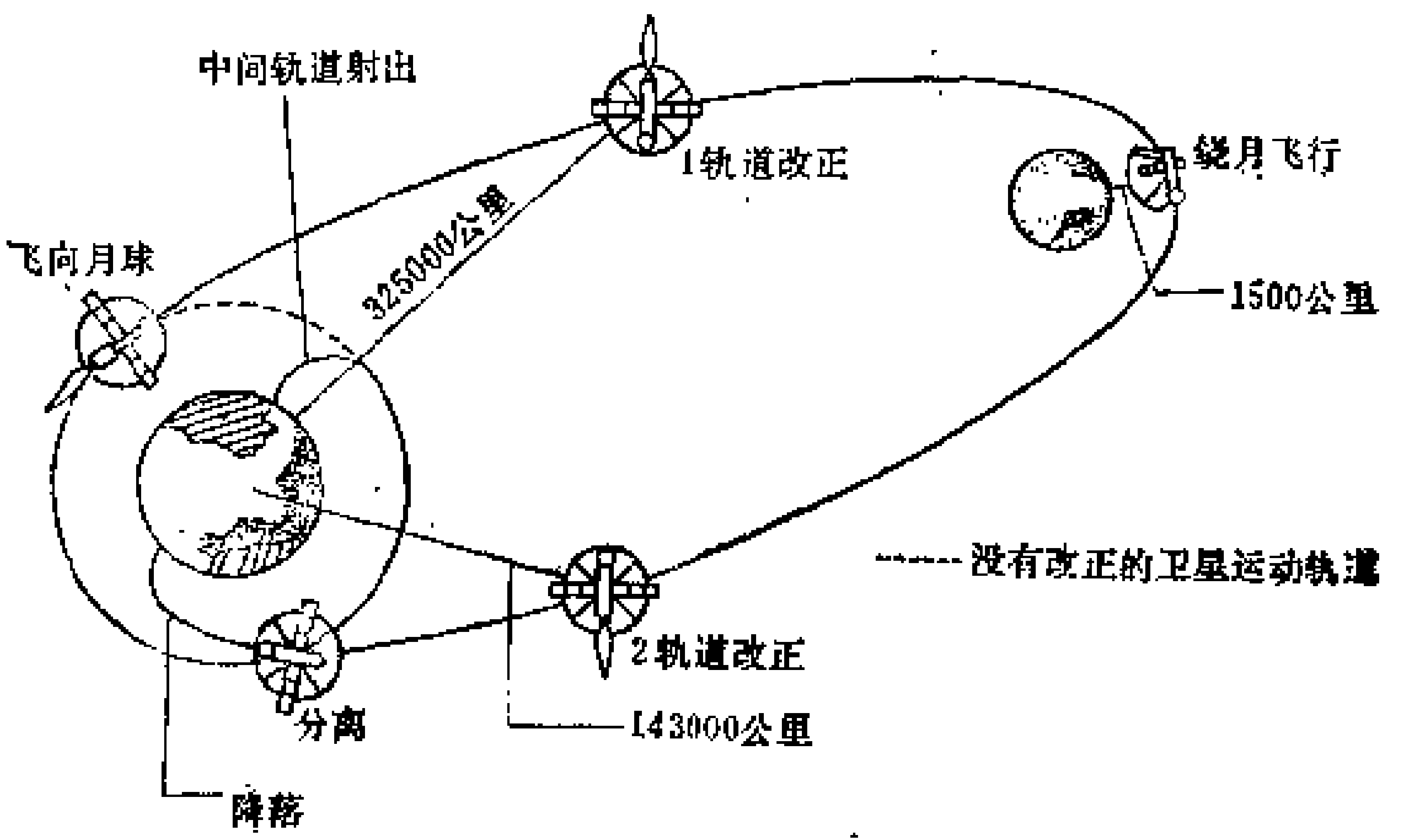


图 53 《探测器-5》航行图式

在《月球-10》号进入月球引力作用球之后，于1966年3月3日达到离月球中心大约2740公里的最小距离(离表面约1000公里)。这时它具有大约2.1公里/秒的月心速度。在与月球中心距离为r的相对于月球的圆周速度，由下式决定：

$$V_k=\sqrt{\frac{fM_L}{r}}=\sqrt{\frac{fM_L}{R_L}}\cdot\sqrt{\frac{R_L}{r}}\doteq1.68\sqrt{\frac{R_L}{r}}\text{公里/秒。}$$

其中R_L为月球平均半径，等于1738公里，而fM_L为月球引力

常数（月球质量和引力常数的积）；它的值比地心引力常数 fM少81.30068倍，即地、月质量之比。

在与月球中心距离r＝2740公里处，有v_k＝1.34公里/秒，乘以$\sqrt{2}$，得抛物线速度，$v_抛$＝1.89公里/秒（在距离r＝66000公里处，$v_抛$＝0.386公里/秒）。

就在行星际站绕过月球、同月球表面的距离最近的时刻，或足够逼近的时刻，在行星际站上的喷气发动机按地球发来的指令开动，使行星际站减速，它相对于月球的速度由2.1公里/秒减少到1.25公里/秒。这个速度不仅少于自月心至给定距离的椭圆速度，而且也少于在这个月心的距离上的圆速度。因此，《月球-10》号转移到月球卫星轨道上。轨道的远月点位于与月球中心距离2740公里处，而近月点为2100公里。

《月球-10》号成为第一个人造月球卫星。

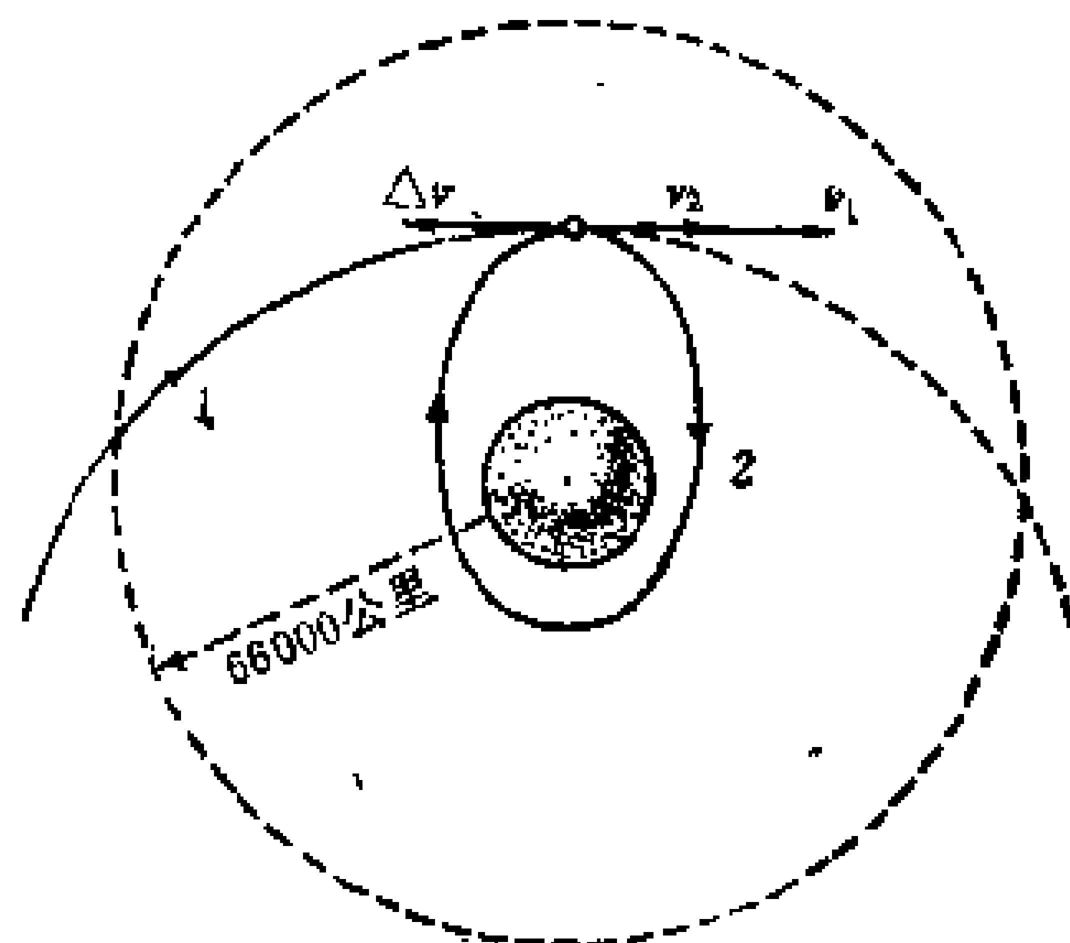


图 54　月球卫星轨道

1. 月心抛物线轨道

v_1行星际站制动速度，Δv制动冲量，v_2行星际站制动后速度。之后，由轨道1进入月球卫星椭圆轨道2。

2. 月球卫星轨道。

到目前为止，许多人造月球卫星的发射，一般都按这种图式，人造火星卫星也是这样。对天体力学，这些卫星是有趣的：首先在于按这原理，分析它们的运动；更确切地说，是分析它们与椭圆运动的偏离，以作出月球和火星引力场特性、以及它们的形状和内部结构（密度分布）的结论。

本书的范围，不允许研究更详细的人造行星卫星的运动。除此以外，我们一般地扔下人造天体旋转运动的许多在实际上相当重要的科学问题。

这些问题是：知道任何时刻宇宙飞行器在空间的方位、决定飞行器的旋转运动姿态的可能性，这是很重要的。如果飞行器的方位不知道，那么要修正它的轨道也就不可能了；因为附加速度冲量应该严格地定向，而修正装置是与飞行器的准确要求相联系的。

然而，与人造天体的旋转运动相关的一切问题是太特殊了。或许在一定程度上已远远超出天体引力起主要作用的天体力学的传统方法。

20、小 行 星 的 运 动

截至1976年初，已经登载过的小行星数目超过2000。所谓登载过是说至少小行星的轨道已经近似地算出。至于已经发现还未登载的小行星无论如何尚有很多，而且每月都有新的发现和新的轨道发表。

由于已经有这样多的小行星，而且还在不断地发现，因此便需要建立机构登载它们，以便能研究它们的运动和将它们与新发现的小行星区别开来。自然，我们不能每天都观

测已经发现的一切小行星，已知的小行星，一般只在它接近地球（即冲日）的时候才观测它们。许多小行星，由于体积很小，只在冲日才能看见。因此，我们便必需确切地知道每颗小行星怎样在空间的运动，和能计算出任何时刻它们在天空的位置。日复一日地观测某颗小行星，确定它在天空的视位置，这样便能校核我们计算的位置的精确度。这便需要对这种小天体的运动，根据牛顿引力定律，作理论的计算。

因此小行星观测特有的先决条件，当然是对它们的运动作理论的探讨。而且，某些小行星的极精密运动理论，近年来表现有一种实际的需要。这些观测应该有助于改进某些基本天文常数❶而这些常数对于星表的编制是必需的。

小行星的运动问题比较大行星或卫星的运动问题既简单又复杂。小行星的质量很小，因而对于其它天体的影响很小，以致我们觉察不到。由于这个缘故，研究小行星运动时，我们不考虑它们的相互作用以及它们对于大行星的影响。我们认为，它们在作为引力中心的太阳的引力单独影响下运动，并受到大行星引力的摄动。此外，我们将大行星看作在与小行星运动丝毫无关的一定的轨道上运动。自然，这使问题大大地简化了。

新的小行星发现后，第一个工作便是推算它的无摄椭圆轨道。至少要在分散于几天内的时刻观测得到小行星的三个视位置，才能计算它的轨道。可是往往发生这样的事：在取得这些数据以前，这个新发现的小行星就不见了。这时还因天阴而不能观测。这样，许多小行星便“丢失”了，而未能登

❶ 这些天文基本常数是描述地球的形状和大小及其运动和对于太阳的距离等。

载入册。1911～1930年间总共发现了1,962颗小行星，但是只有484颗的轨道计算出来，而被记录在案。自然，最初算出的轨道并不特别精确，还需要作进一步的观测去使它更准确些。

但是我们不能满足于计算出的小行星的椭圆轨道，因为它们受到大行星的摄动往往很大。实际上，我们只考虑引力最大的木星和土星的摄动。建立小行星运动的理论时，目前广泛使用逐步逼近的数值计算法。

但是，小行星的运动有时远比大行星复杂。小行星的椭圆轨道一般比大行星的轨道椭长得多，大多数小行星的运动平面与地球的运动平面的交角，比大行星的轨道交角大得多。这首先在小行星所受的摄动的计算上引起纯粹数学的困难。而且，许多小行星有时相当接近木星，受到它的相当强大的引力。图55表示，木星以及小行星智神星和婚神星的轨道。智神星和婚神星的轨道半长轴分别为2.8和2.7天文单位，偏心率分别为0.24与0.26。婚神星和智神星能分别与木星接近到1.9和2.0天文单

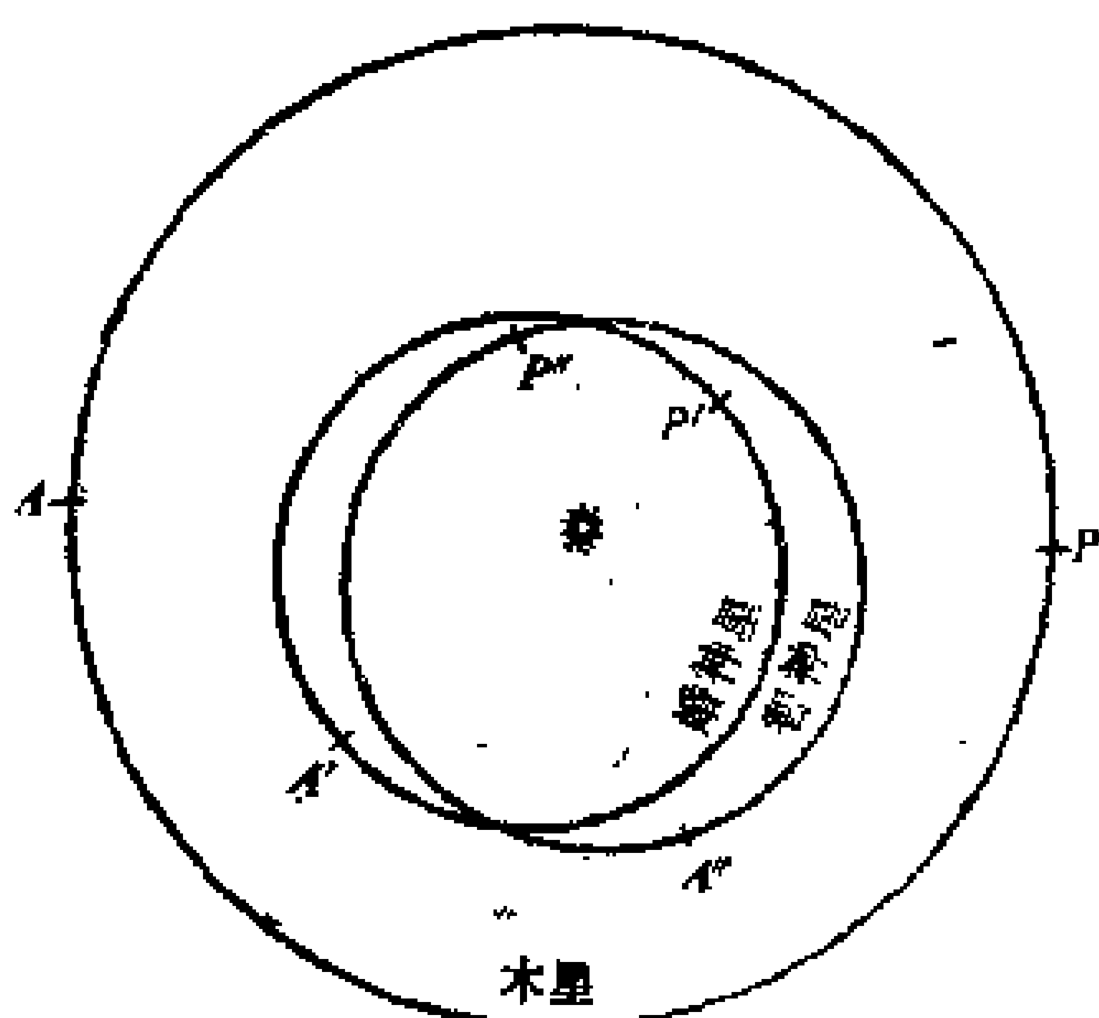


图 55 婚神星和智神星的轨道❶（A与P表示轨道上的远日点与近日点）

❶ 图内没有表现小行星的轨道交角。

位（如果我们考虑木星和智神星的轨道面的交角）。在这些位置上太阳施于这两颗小行星的引力只超过木星的引力的290～300倍。

因此，小行星所受到的摄动比大行星所受到的要大得多，甚至在较短时间内，这些摄动不以弧秒或弧分计，而以几十弧分，甚至弧度计算。而且，这是一种使得摄动的准确计算复杂化的因素。

因为这个缘故，而且也因为天文学工作者对于小行星远不如对大行星那样注意，所以只有少数小行星建立起运动理论，而且这些理论的精密度显著低于大行星的运动理论。无论如何，目前小行星在天空位置的观测精度只到1″，有时观测与最好的小行星运动理论之间的差值达到几十弧秒。

目前广泛使用数值方法作小行星的摄动计算，以编制反映小行星在天空的视位置及其它有关小行星运动数据的表。这些方法使我们能指出小行星在空间的位置和它的在天球上的视位置，比用分析方法得到的精度高得多。在列宁格勒的苏联科学院理论天文研究所，便使用数值方法以编制《小行星年历》这本年历中载有已经登记的一切小行星运动数据，使观测者能跟踪小行星的运动。

21、行星的自转

至此，我们只谈了行星及其它天体围绕太阳的运动，以及卫星围绕它们的主星的运动。这是由它的引力中心的运动所决定的天体的公转。但是，除了这种运动之外，天体还有相对于自己的引力中心的运动，这便是它的自传运动。

地球围绕一条想象的直线（称为自转轴）的自转运动，反映在整个天球的周日视旋转上。地球的自转也可以用某些物理实验（如傅科摆实验）检测出来，而且为在地面上观察到的许多现象❶所证实。由观测恒星而决定的地球的自转周期，等于23时56分48秒。

火星、木星和土星的自转，能用望远镜仔细容易地观测测出：望远镜所见的它们表面的不同斑点和标志，并不停留在一处不动，而是看来在行星的整个圆面上移动，从一边出现而隐没于另一边。这便是行星在自转的一种证据。

这一类观测有助于决定这些行星的自转的周期。火星的自转周期约为24时37分，木星9时50分，土星10时20分。其它行星的表面还没有检测到特征部位。它们的自转周期用特殊的观测方法来决定。天王星的自转周期为10时45分，海王星15时（均由分光法根据谱线位移测量）。由雷达观测到水星的自转周期约为59日（即为公转周期的2/3❷），金星的自转周期约243日（但是由东向西逆转）。据光度测量，冥王星的自转周期约为6.39日。

由观测表明，行星自转的方式使它们的自转轴在很长的时期内，在空间维持一定的取向。它们的自转周期也稳定不变。

我们可以直接观测到月球的自转运动。月球常将它的一面对着地球，这意味着它绕轴自转一周的时间恰好等于它绕地球公转的周期，即约27.3日。

虽然一些特殊的方法可以探测太阳系天体的自转运动，

---

❶ 例如河流两岸，在北半球右岸陡峻，左岸平坦，而在南半球则右岸平坦，左岸陡峻，这便是地球自转造成的效果。

❷ 根据天体力学可以解释这两种周期可以公度的原因。（译注）

但是最有兴趣的还是行星和月球的自转。因此本章内我们只讨论行星自转。

当然，要问行星为什么自转或它们为什么运动，一般是没有意义的。宇宙里一切物体，小至尘埃，大至庞大的星系都在不断地运动中，没有无运动的物质这样的东西。后来形成行星的物质也在运动中。行星在“诞生”过程中便同时具有围绕太阳的轨道平动（公转）和围绕它们自身的轴的转动（自转）。

但是，我们能够问，而且应该问：行星怎样运动，什么力支配着这种运动，行星运动遵循什么定律。我们已经分析过行星的轨道运动，现在来讨论行星的自转问题。

按照力学的基本定律，如果一个物体不受任何外力的作用，那么它应按惯性运动。如果它在作平动，那么在无外力的情况下，它应当静止或作匀速直线运动，即以初始时刻具有的速度运动。在一般的情形里，惯性自转（即无作用力下的自转），显出要复杂得多。现在先考察与行星自转直接相关的这种运动的一个特例。

如果一个具有对称轴的刚体（如圆锥、圆柱或回转椭球），围绕这个轴自转，那么物体的转速和这轴在空间的取向，在没有外力的作用下，应该保持不变。这便是我们所看到的示意于图56上的麦克斯威陀螺的情况。

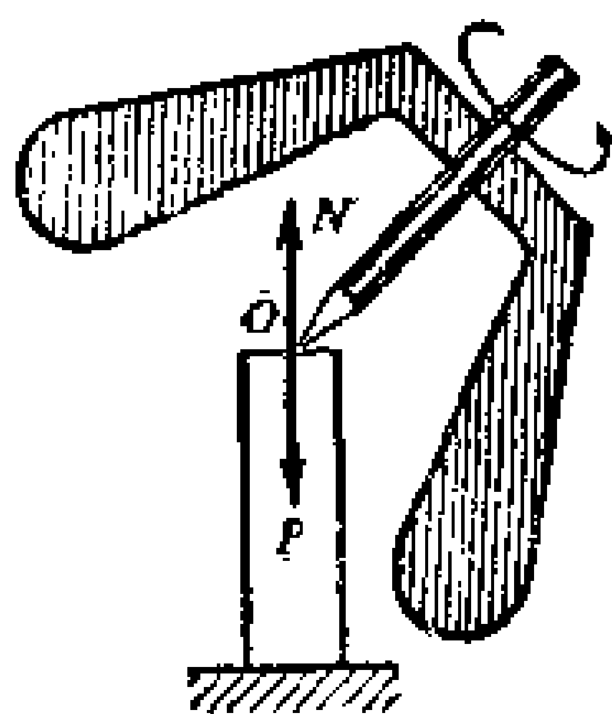


图 56　麦克斯威陀螺

这陀螺是铃形的，边上厚重。它的重心在铃内的O点。这铃形陀螺所安装的轴的尖端在O点处。如果安放陀螺使O点停在支柱上，那么陀螺的重

力P将表现为陀螺给予支柱的压力，而这压力将为这个支柱的阻力所平衡。

换句话说，这陀螺将成为没有外力作用的物体，因而它应该按惯性运动。如果把它放在一定的位置上，那么它便静止在那里。如果轻微地拍动一下陀螺的轴，那么它将摆动一会儿，然后稳定在新的位置上。

现在使陀螺绕它的轴旋转。这陀螺将旋转，并且保持它在支柱上的位置不变。而且，如果这陀螺快速旋转，那么便得使用相当大的外力才能改变这个旋转轴的方向。

如果陀螺没有东西支撑，而是简单地让它从空中落下，那也会发生相同的事件；在此情形下，陀螺将受到使它落下的重力的作用。这重力的方向通过陀螺的重心。如果抛出前，给陀螺的轴施加强扭力，那么它便将继续以相同的速度旋转，它的旋转轴将始终保持相同的方向（图57）。

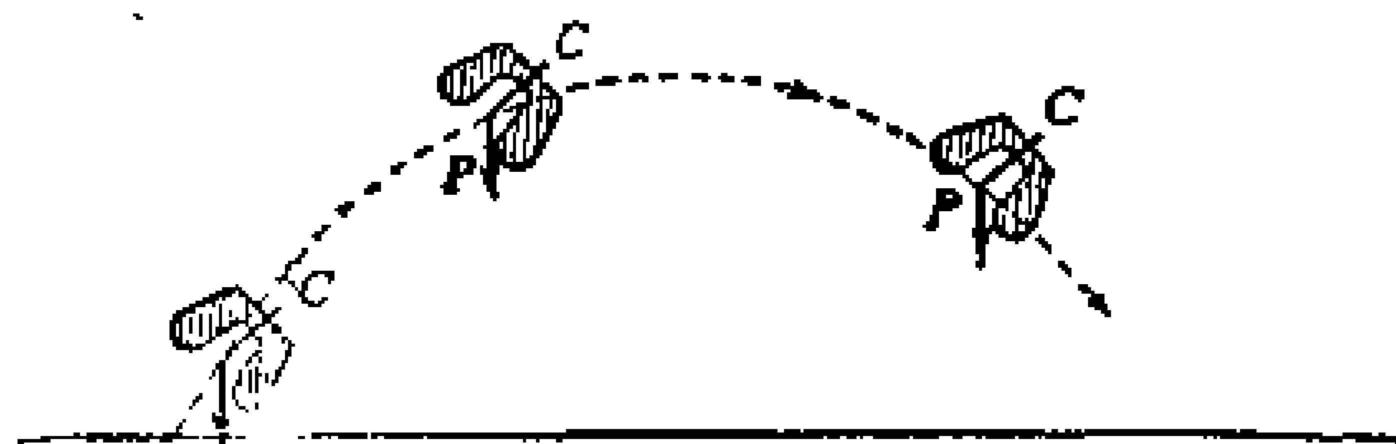


图 57　向上抛出的旋转陀螺，其旋转轴的方向不变

现在设想延长陀螺的轴线，把它放在支柱上，而且使它快速旋转。现在这陀螺受到重力和支柱的阻力，两者并不相互抵消，其合力将力图使陀螺倾倒。如果陀螺不旋转，那么它便会容易地倒下。但是当它迅速旋转时，却不倒下。陀螺的轴有规则地摆动着，描出围绕垂线的圆锥面（图58）。而且旋转速率维持不变。

讨论行星自转运动时，我们遇见一种类似这陀螺运动的情形。现在以地球的自转运动为例来说明它，因为地球的自转已经仔细地研究过，而且实际上也是一个最重要的情形。行星自转运动的研究基本上与地球的自转运动的相同。

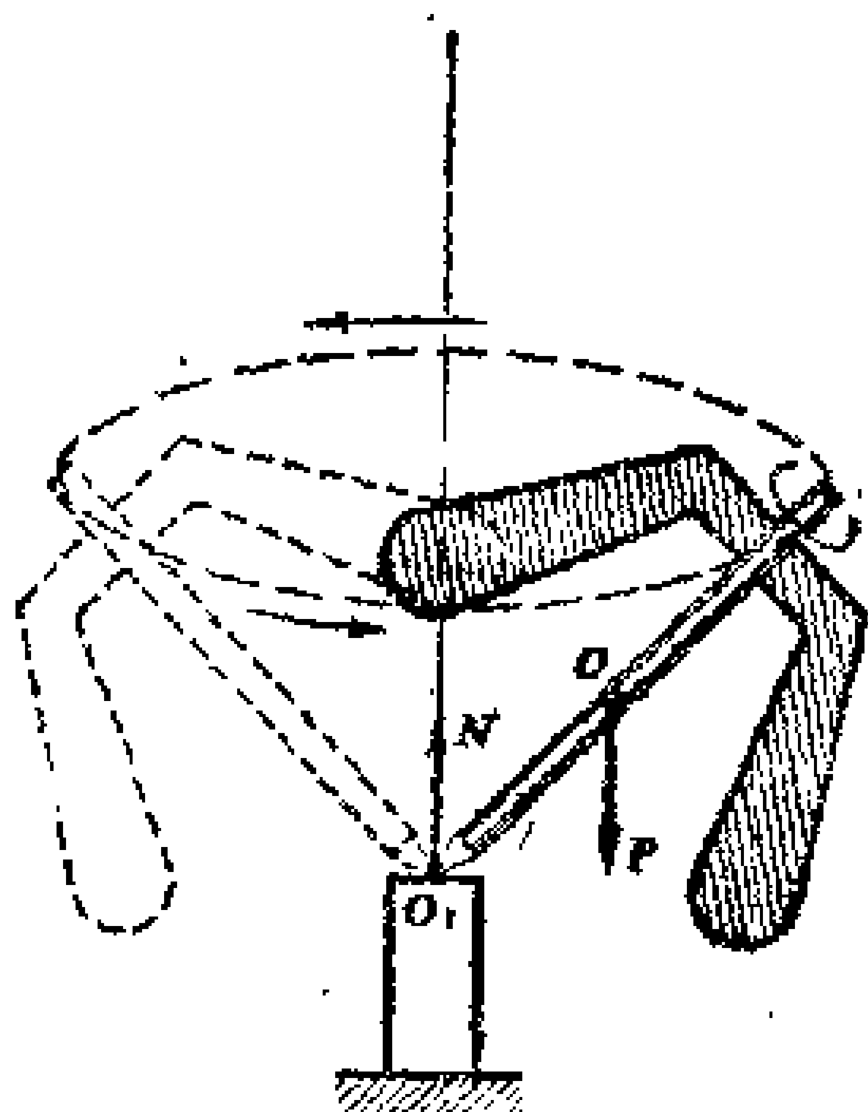


图 58 陀螺的进动

地球的形状，与其它行星一样，类似沿自转轴稍微扁平的回转椭球（赤道的半径大于极半径）。因此，地球不能象正球那样被其它天体所吸引，作用在地球上的引力不恰好通过地球的引力中心。

我们已经讨论过类球体的引力定律。由这个定律可以得出，地球被某些天体（图59里表示为M）吸引之力与M吸引圆球之力不同（首先是在大小上）。此外，它不但给予地球以平动，而且力图使地轴转向。这是可以从图59看出的。计算表明力图使地轴转向的力的大小与吸引体M的质量m成正比，而与M和地球中心之间的距离立方成反比。

比较作用在地球上与作用在陀螺上之力，能推断不同天体对于地球的引力不应该影响地球的自转速率，而是导致地球的自转轴作有规则的摆动。哪个天体应当对地球的自转施加最大的影响呢？

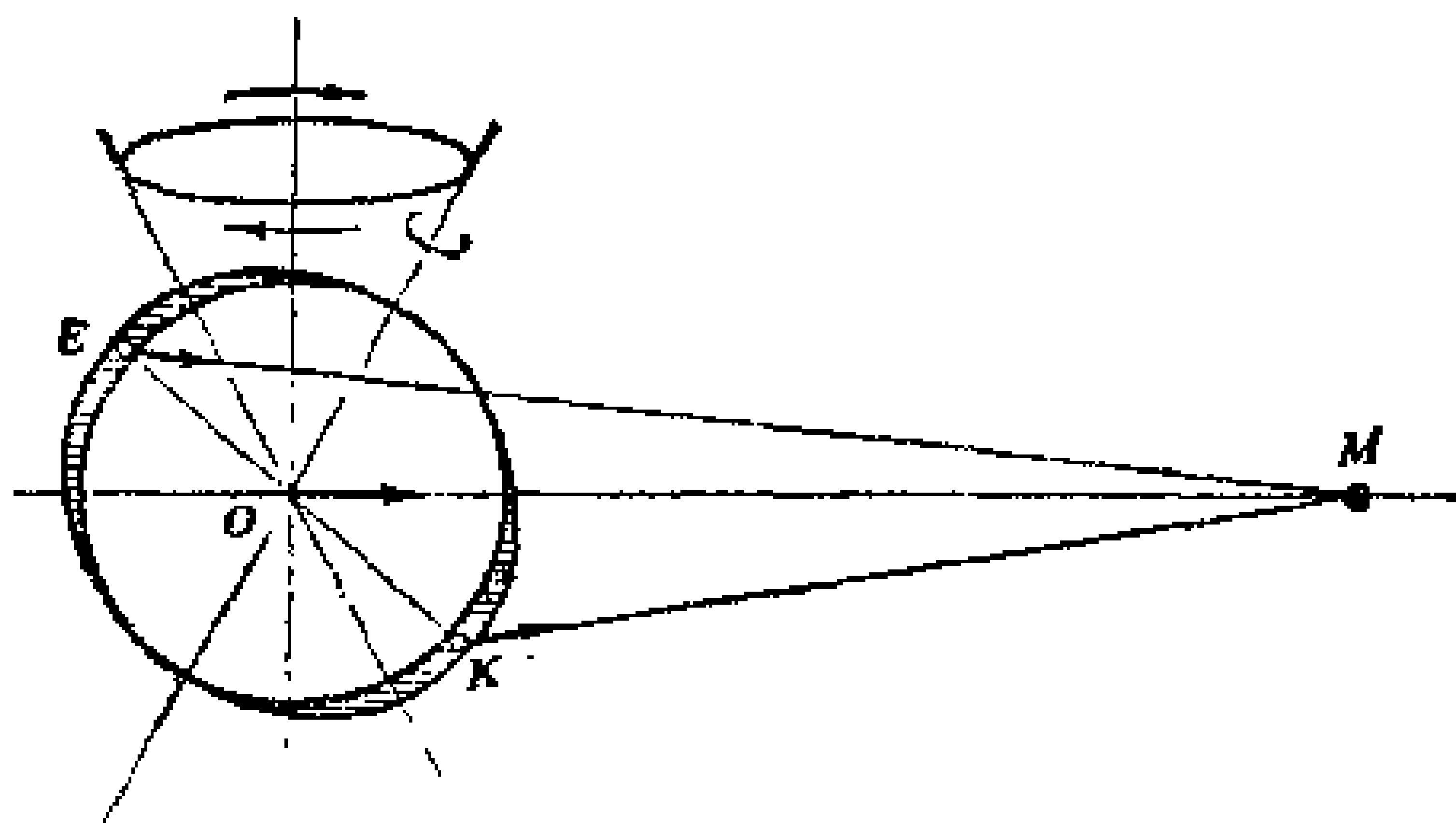


图 59 由月球引力造成的地球的运动的解释

首先是月球，因为它离地球最近；其次是太阳，它的距离虽然远，但是质量却是很大。其它行星施加的影响很小，因为摄动作用随距离迅速地减弱。由$F \sim m/r^3$的关系，我们算出月亮的影响比太阳强2.2倍，比金星强13,000倍，比木星强140,000倍，比火星强800,000倍。其余行星对于地球自转的影响还要小些。

地球围绕太阳运动，月亮围绕地球运动。因为这个缘故，月-地-日三体组态在不断地变化，结果作用在地球自转轴上的诸力的大小和方向也在不断地变化。由于这些力，地球的自转轴作复杂的运动。首先，这个轴缓慢地描出一个圆锥面，它总是与地球的运动平面之轴成23°.5的交角（图60）。这叫做地球自转轴的**进动**，它的周期大约是26，000年。此外，地球的自转轴还对于它的平均位置作各种微小的摆动。这些摆动中最重要的一个叫做**主章动**，周期接近19年。

我们怎样能够测出地球自转轴的这种运动呢？为什么这种运动的研究很重要呢？

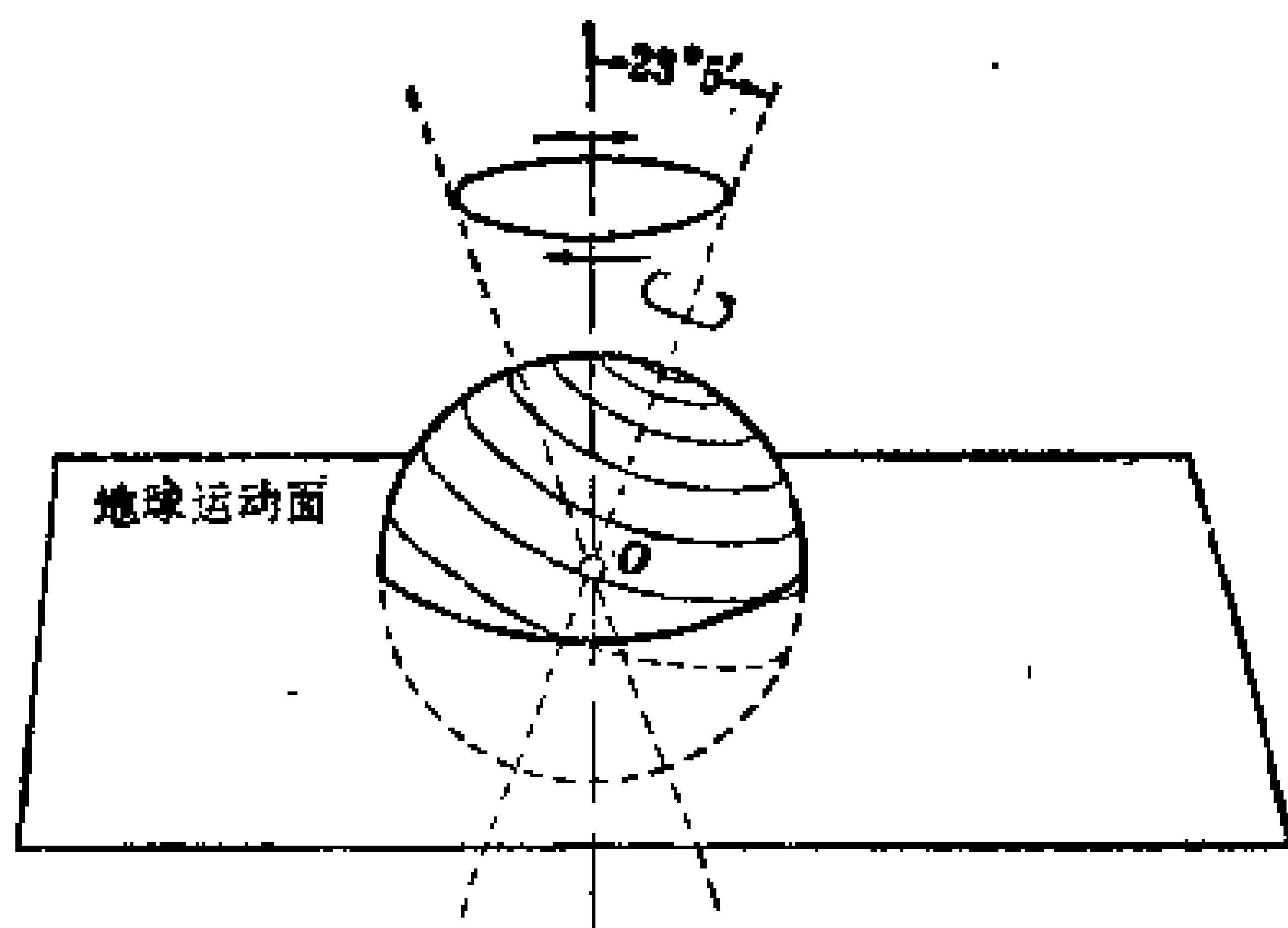


图 60 地轴的进动

我们从地面上观测天体。因此，它们的位置只能相对于与地球联系的定标点来决定。这些定标点与地球围绕太阳运动的轨道面（黄道面）、地球自转轴的方向和与地轴正交的赤道面有关。自转轴的方向与天球交于北南两个极点，天球便围绕这两极作周日的视旋转。这些与地球相联而不参与地球的周日旋转的定标点，使我们得以"确定"每个天体在天球上的位置。

由于地球自转轴的进动，两极点在天球上绘出半径为23°.5的圆圈。因为两极点走一圈要花26,000年，所以一年内极点移动大约50″，地球自转轴的章动使极点作一些周期性的位移，幅度达9″。

地球自转轴方向的改变导致赤道面发生变化，使极点在天球上的位置改变，那就是说，导致天体在天空相对于这些定标点的发生视移动。由于地球运动所造成的这些视位移，与天体在空间的真运动所造成的视移动叠加。因此，只有当我们能够指出天体的视运动里，哪部分是由于它们在空间的

真运动所致，哪部分是由于地球的运动所致的时候，我们才能得出天体的运动的一个正确的图象。这便说明研究天体运动时，为什么我们必须了解这些定标点怎样变化。

恒星距离地球很远，在天球上的位置几乎保持不变。恒星的位置相对于极点、赤道面和黄道面的改变，主要反映的不是恒星本身的运动（"自行"），而是极点、赤道和黄道的位移。就是这种恒星位置的改变，被两千年前希腊天文学家喜帕恰斯发现，他把这现象命名为步差。但是那时没有人理解形成步差的原因。直到18世纪初才由牛顿应用引力定律，解释步差的成因，并预言章动和地轴上其它的摆动。恒星位置的章动振荡（恒星章动）于18世纪中叶（1747）才为布拉德累（Bradley）发现。

地球的自转运动，是在恒星观测的基础上，又从理论上进行研究。可是目前需要更精密地测定地球自转轴的进动和章动。问题是，恒星象其它天体一样，在空间运动，而这些运动状况还相当模糊不清。这就意味着，从恒星的观测去决定极移和赤道面的移动，是没有多大意义的，因为恒星的运动还没有确定。

为了较精密地测定进动和章动的大小，我们必须观测它们在空间和在天球上的位置，确切知道的（虽然它们可能不是恒定的）天体。这样的天体是太阳系里的行星和小行星；它们围绕太阳的运动能利用牛顿的引力定律去研究。我们已经有了大行星运动的精确理论。可是实际上使用小行星更方便些，因为它们看起来是发光点而大行星呈现出难于确定中心的圆轮。恒星和小行星的位置（它们是确定进动和章动常数的所必需的）比恒星和大行星的位置精度高得多。这便是第20节所说的，为什么我们需要小行星的精密理论。

我们考察了由于月球和太阳的摄动作用所致的地球的自转轴在空间的运动。但是地球怎样围绕这个轴旋转呢?

如果我们只考虑地球与其它天体间的相互引力，那么它的自转速率根本不应当有什么改变。由地球自转周期决定的每天的长度，应当保持不变。但是事实上地球的自转速率在逐渐降低。地球日在很缓慢地变长，每世纪增加0.001秒。我们怎样计算日子的这种变长呢?

每日的长度的改变是与潮汐有关联的。大家知道，海水的高度（水位）在一天内并不保持相同，而在作有规律地变化。每六小时的历程中，海水上涨达到高潮；以后水面降低，大约经过六小时达到低潮，如此循环不已，作周期性的变化。

在同一经度圈上的地区，潮汐的情况差不多发生于相同的时间；某一地点之东潮来较早，之西潮来较迟。这样，按经圈长度延伸的潮汐波在海洋里由东向西运动，即在与地球相反的方向上运动。赤道上，潮汐波的运动速率为1,600公里/时，围绕地球一周需要24时50分。这也是月球围绕地球一周的视周期。就是由于这个事实，很久以前人们便认识潮汐与月球之间有某种关系❶。但牛顿是根据万有引力定律给予潮汐以正确的解释第一个人。

月球给予地球的引力实际是由于月球给予组成地球的每个质点的引力的总和。在某一给定时刻，比较接近月球的质点，受到较强的引力，而那些距离月球较远的质点受到的引力较弱。如果地球是刚体，那么各个质点所受到的引力之间

---

❶ 汉代哲学家王充（公元27～97）在他的《论衡》里，已经提到"涛之起也，随月盛衰"，说明了月相变化与潮汐涨落的关系。（译注）

的差值是无关紧要的。于是我们可以说地球作为一个整体在运动，由地球中心的运动和地球绕轴自转来决定。可是，地球不是绝对的刚体，而且还覆盖着海洋(地表71%是水域)，液体质点的运动方式与地球的刚体部分的运动稍微不同。

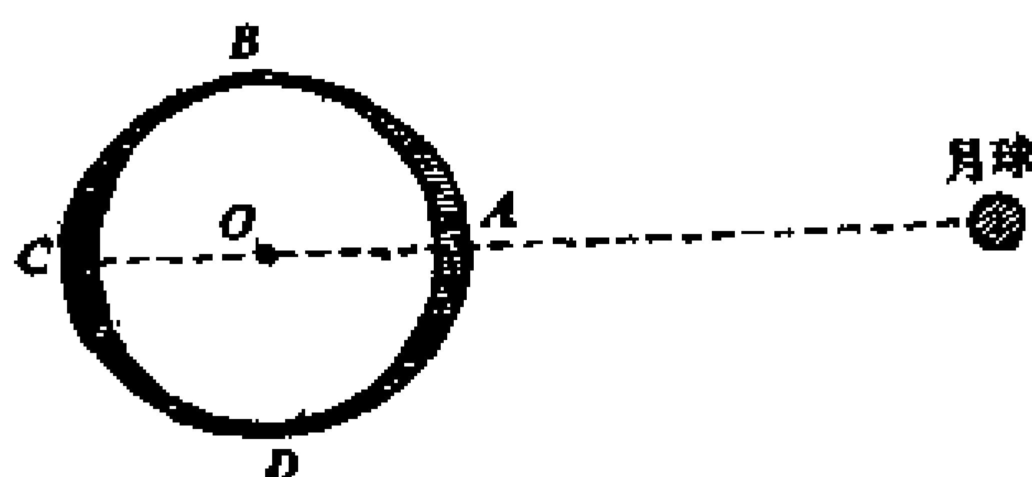


图 61　潮汐波的形成

某给定时刻与月球最接近的水点(图61 中的A点附近)与最远的水点(C点附近)被月球吸引之力强度不同。与地心O处的质点相比，A处的质点受月球的引力较强，而C处的质点受到的引力较弱。结果便是：与地心O和地球的一切刚体部分的质点相比，A处附近的水质点吸引向月球较多，而C处附近的水质点被吸引向月球较少，于是地球正对月球一面的海水上升而造成高潮。相反的一面的C处也出现高潮，因为这一点附近的水点在其向月球运动里落后于地球的中心。因此A与C两点附近，由于水积聚升起，而出现高潮；而在B和D两点水位降落而出现低潮。

对于月球A与C两点附近的潮峰力图保持在同一个位置上。但是对于地球，潮峰却由于地球自转而改变了位置，而且在与地球自转相反的方向上运动。潮汐波在其由东向西的运动里，受到海洋底的摩擦和潮水冲击的陆地的阻力。由于这个缘故，旋转的地球拖着潮峰运动，它们所占的对于地球的位置如图62所示。这说明为什么每一地区潮汐落后于月球

过子午圈（上中天或下中天）的时刻。

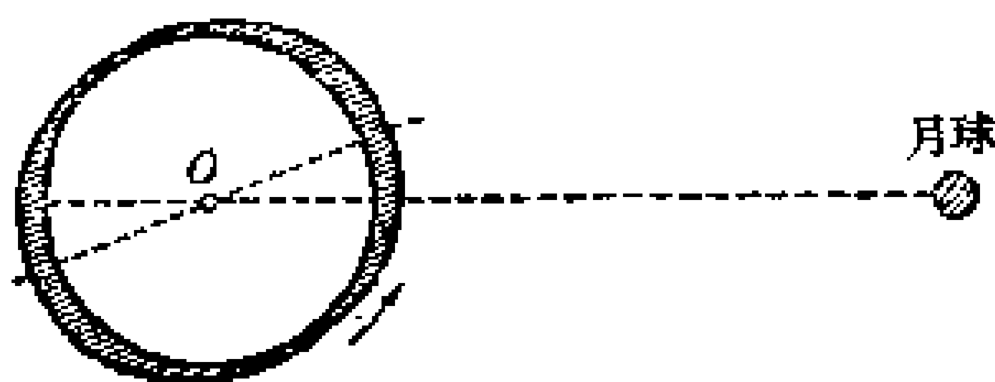


图 62　由于地球旋转，潮汐波的移动

潮汐波与洋底之间的摩擦力，以及由于水的粘滞性所致的内摩擦力，使地球的旋转减速。但是潮汐波的形成不只在地球的水壳内，也在其固体内（陆潮），因为地球不是完全的刚体。由于地球物质的粘滞性，地球的自转使这些潮汐波也通过地球从而形成内摩擦，使地球自转变慢。总的结果便是，地球的自转逐渐减速。我们已经讲过，地球日的长度在每世纪内大约增长0.001秒。

怎么可能探测出日子的长度上这样微小的变化呢？直接观测日长，自然是很困难的；但积累很长的岁月，这种不断增长的日长所产生的影响是可以探测得到的。

设想有一个钟正好随着地球自转，而另一个钟则根本没有时间失误。为简便计，设目前地球的自转周期等于一个平太阳日（而不是一恒星日，即不是23时56分平太阳时）。按我们的日（即以第一个钟的时针走过一整周的时间为一日）● 100年内短了0.001秒，而这100年内此种时间每天减短之量 ϵ = 0.0016/36,525（100年 = 36,525日）。这样，如果第二个时钟的时针自转每日的角速率（换言之，即一日内时针

● 钟面一周分为24时，而不是12时，所以一天时针在钟面运行一周。

所扫过的角度，以时、分、秒的时间表示❶）经常保持不变而等于ω，那么第一个钟的日角速率则不断地变化着，而等于$\omega=\omega_0-et$（t以日数计）。e这个量是第一个钟的指针的转动角速率的减速度（即角减速率）或这个钟的走慢度。在时间t内第二个钟走过的圈数等于$T_0=\omega_0 t$，而第一个钟走过的圈数等于$T=\omega_0 t-\frac{et^2}{2}$（按匀减速运动的公式）。在t时内第一个钟对第二个钟的时间延迟为$T_0-T=\frac{1}{2}et^2$（t以日为单位计算）。在100年内，即大约在36,525日内，第一个钟的时间延迟大约是：

$$\frac{1}{2}\times 0.0016\times 36{,}525\approx 29\text{秒}；$$

在1000年内延迟2,900秒（0.81小时），2000年差不多延迟3.24小时。

天文学利用地球对于恒星的自转周期计时；这便是以上所说的第一类钟，它当然在逐渐变慢。由上面的计算表明这种变慢的程度。很久以前人们已经发现天文时在变慢中。即使在18世纪，关于古代的日食观测的现存资料的研究，发现这些记录的日蚀发生时刻，比根据月球和地球的运动理论所算出的预期时刻，要早几小时。那时德国哲学家康德（Kant）便首先指出地球自转逐渐变缓。

对月球的仔细观测将在短得多的时间内揭示出地球的自转速率变缓。事实上，100年内匀速的钟将比天文钟大约快29秒。月亮在恒星间以每日360°/27.3≈13°2（或每秒以

❶ 天文学上角度常以时间单位表示：360° 对应于24时或1440分或86400秒。

0″.55）的速率运动。在这附加的29秒钟内，月亮在恒星间大约运动了16″。我们应该因而测出在一个世纪内，月球的附加位移大约是16″。这种附加运动（与根据月球运动理论推出的结果比较）实际上观察到了；它不能用由于地球、太阳或行星所致的摄动去说明。

但是地球自转速率的改变，却不局限于这种长期减速，有时地球日上也经受与发生在地球内部的过程相联系的摆动。这些摆动的幅度一年内达到0.001秒或更大，这导致天文钟在这一年内快或慢0.05至0.07秒。目前还有所谓石英钟，它是一种异常好的守时器，远比地球自转准确得多，借助于这种钟，可以直接查出“天文钟”（即地球自转）的不均匀的“跳动”。

这种地球自转速度的不断的变化，称为长期减速。此外地球的自转，也经受季节性变动，可能是由于大气团和海水的位移，改变了地球自转的动力学特征所致；其原因还没有完全查明。所以，实际上天文时的延迟是相当大，而且比随时间间隔平方成正比还来得复杂。在当前，这种延迟性以及地球自转的不均匀性，可以用两种方法来计算：1），借助于将记录到的地球附加位移，与月球运动理论位置之差相比较，这附加位移可以解释为天文时与均匀时之差；2），借助天文时与原子时读数的比较，来发现它同地球自转的较大差数。这些，已在国外作了一系列测定了。

原子时与理想的均匀时每一千年相差不超过一秒。

监视原子时变化的工作，从1955年开始，将实际上的昼夜长度与原子时标度变化进行详细比较，有关昼夜长度复杂变化例子可见图63，时间自1971年至1974年。从图上可以看出：季节性的变化比三个月之内（相应的天文时与原子时差别为

0.045～0.063秒）的变化小些；但超过昼夜的长期增加几乎400倍。同样大的突变是1973年中旬至1974年1月1日，昼夜增加0.0011秒。已经发现，在1955年至1972年中间，地球旋转减慢，昼夜增长0.0025秒（在这期间的昼夜长期增加共约0.0003秒），同时，在1973年至1975年间，也有所起伏，地球自转逐渐加速，而昼夜变短。所有这些特殊的地球旋转不均衡，还需继续研究。

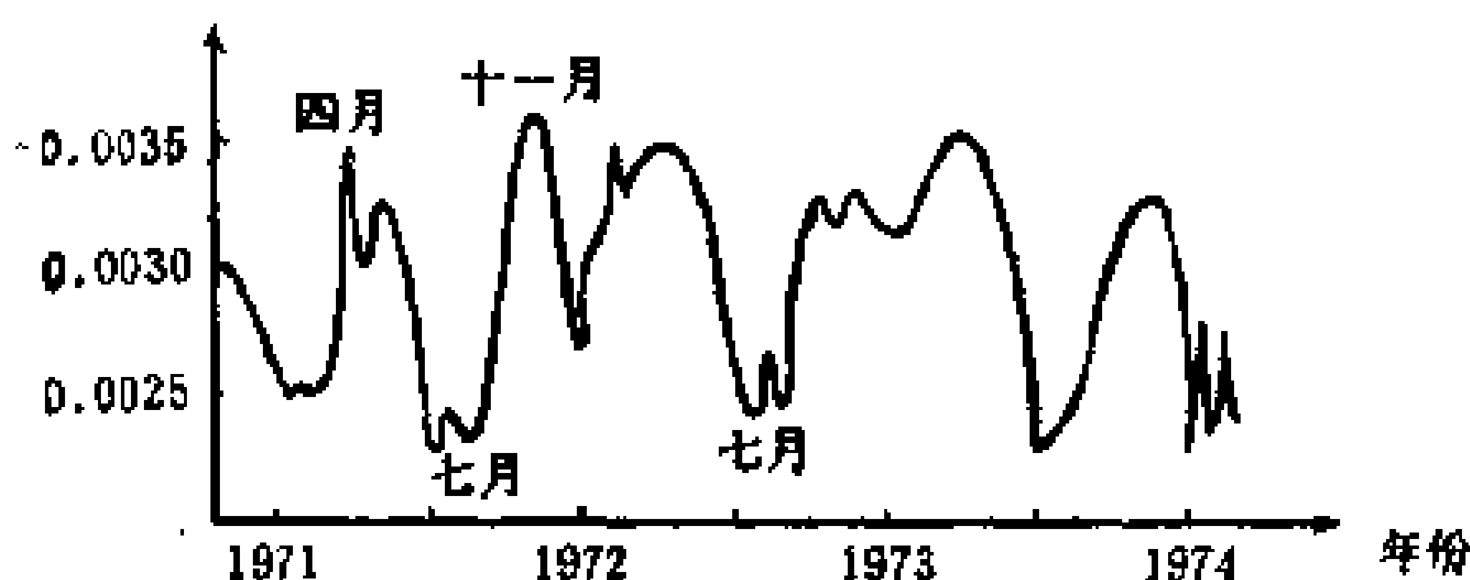


图 63　1971～1974年昼夜长度突变，历元为1900年的标准日长

22、天体力学的定性问题

我们已经谈到太阳系天体的运动研究，所涉及的时间比较短暂，对过去与未来都没有延伸很远。目前，借助于分析和数值两种方法，成功地进行了这些探讨。自然所有这些方法还有待于改进。分析法特别是如此，因为它的精度已经被数值法大大超过。我们需要更精密的卫星运动理论，以便利用它来更正确地求出行星的扁率、土星光环的质量和卫星本身的质量。我们还需要更精确的小行星运动理论，提到日程

上的一个问题是发展地球自转运动的理论研究，以说明地球内部物质的密度变化等等。但是，这些问题已经相当仔细地研究过。这只是一个完善、改进、我们的知识和探讨方法的问题。

通用的行星、卫星、小行星和彗星运动的分析和数值理论，在大多数情况下是精确地描绘出这些天体在几十年甚至几百年前或几百年后怎样运动。但是我们研究太阳系起源和演化的问题时，便需要知道比这些在长得多的时期里的运动性质。我们所感兴趣的是行星、卫星、小行星和彗星在几百、几千、乃至几百万年以前发生的运动和在这些时间内发生的变化。几百万年以后，行星运动中可能发生的变化的研究，也是一样地重要。

在所有这些情况下，这些天体的运动的通用理论便无能为力了，因为它们只能应用于极有限、而比较短的时段内。因此，便有人提出天体力学的**定性方法**，以研究长时期内天体运动性质的变化问题。它们与定量方法不同的是：它们并不能直接计算出天体在空间的位置、或确定它们的质量等，但是使我们估计一般性的运动的改变。

例如，试考察在初时刻相互离开的两体的问题。这问题是求出这两个天体是否能离开到任何距离去(用术语讲，到**无限远**去)。

在这情况下，问题是容易回答的，并不需要应用定性的方法，因为我们已经有了这问题的确切解。这两个天体的相对运动，是沿在椭圆抛物线或双曲线，取决于初速度。因此，如果两体的相对初速度大于一个定量（作双曲线运动），它们将无限地彼此离开，如果小于某一定量（作椭圆运动），它们就不能离开到一定距离以外。

试就三体运动问题，讨论相似的情形。设想具有特定质量的三体在运动，在初始瞬间它们将相互向不同的方向离去（即开始时它们之间的距离将不断地增加）。这三体将来的运动又怎样呢？

在这情况下，这个问题便没有确切解，但是用定性的方法来探讨这个问题，可以得到一个答案。

如果这三体的相对初速度大于一定量，它们将彼此离开到无限远去。但是，如果初速度小于这个值，便可能发生两种情形：1.三体都只能离开到一定距离，2.三体中的一体将走到无限远去，而另两体相互在椭圆轨道上运动。

再讨论另外一个问题：即质量不是常数，而是随时间减少的两体运动。如果不知道这两体的质量变化的规律，我们便不能精确地确定它们的运动。但是定性方法使我们能说：如果这两体的初时刻的相对速度比较小，它们将相对地在椭圆上运动，这两个椭圆的半长轴和偏心率将逐渐增大，从而这两体也将逐渐分离，它们的轨迹将愈来愈加椭长。

在19世纪，人们的注意力大大集中在太阳系的稳定问题上。这问题可以表述为：一切行星是否象现在这样永远运行在同一平面内近似正圆的轨道上，而且与太阳保持相同的平均距离？换言之，行星轨道的半长轴、偏心率和交角的变化是否纯粹是长期性的变化呢？

以上讲过，拉普拉斯、拉格朗日和勒威耶等人曾对行星的长期摄动作过大量的探讨。他们的研究表明，上述太阳系里行星的轨道根数没有纯粹长期的摄动。但由于数学上的困难，这些研究里只考虑了行星的主要的相互摄动，而忽略了不重要的摄动。因此从数学上说，这个问题没有严格的解。迄至目前，得到的结果只使我们能说行星的运动（即太阳系

的结构）在几百万年内是稳定的。

太阳系在远古时代的某些情况，可以从地质学的研究得来。地质学上的发现表明，在近几百万年的历程内，地球上的气候没有发生过由于地球围绕太阳运动性质的变化而造成根本性的改变。即使欧洲古代气候冰川时代突然开始此类可觉察到的气候条件变化，也可以合理地解释为地球轨道的偏心率和地轴与黄道面的交角由于长周期振动所致的微小的摆动。探讨表明，这些摆动完全可能导致欧洲年平均温度降低到足以发生冰川。由于地球上可觉察到在离开或接近太阳而造成的地球轨道偏心率或半长轴的较大变化，可能已经在大得多的程度上影响地球气候，但是地质学上甚至还没有发现近几百万年内气候上有这样根本的变化的最小的迹象。●

因此我们可以推断，在近几百万年内地球运动的情况正与目前的情况一样。因为一切行星都由于相互的振动而联系着，所以一个行星的运动的显著变化最终不会不在全部行星的运动上引起可觉察到的变化。但是由于没有一个行星的运动上发生过巨大的振动，因此其它行星的运动也显然只能有过微小的改变。由此可以推断，不只地球的运动，而且其它大行星的运动，在近几百万年内都基本上没有什么改变。

一个有趣的例子是探讨土星光环的历史。即使用最大的望远镜看来，光环也有为固体的形态。根据观测的数据，光环的厚度估计大约是20公里，但是它的宽度却有大约60,000公里。在18和19世纪，人们猜测土星的光环实际上是固体的结构。即使在那时有些天文学家就已经怀疑土星周围怎么会

● 附带说一句更接近实际的看法是，冰川期或地球气候的其它大范围的变化可以用“局部”的或“地球”的原因，例如用猛烈和持久的洋流性质的改变来解释。

有这样一个环绕土星的固态的、很薄的大圆环。19世纪中期英国物理学家麦克斯威（Maxwell）终于给出了最终的答案。他推论如下：因为光环是物体，所以它必须遵守引力定律。如果光环不运动，那么它会由于重力作用而坠落到土星表面上去。可见光环在运动。但是，一个固态的平而薄的环能在引力影响下（它上面每个质点都被土星吸引），围绕土星运动吗？麦克斯威证明，固体环这样的自转是不能稳定的。运动开始后一定时间内，这个固态环便一定会破裂成分离碎片。于是麦克斯威得出结论：土星的光环应该由数不清的大量固态细小物体组成，其中每颗粒子在牛顿引力的作用下，围绕土星各在其轨道上运动。

后来在19世纪末和20世纪初，俄国天文学家贝洛波尔斯基（Belopolsky）和美国天文学家基勒（Keeler）对土星光环的分光观测，充分证明了麦克斯威的结论。他们发现，土星光环的外层比内层运转得缓慢一些。一个固态物体是不能作这种方式的自转的。这便表明，土星的光环不是固态，而是许多独立的物体按开普勒第三定律围绕土星运动，物体愈接近土星，运动愈快。

与卫星和小行星以及整个太阳系的起源问题有关系的卫星和小行星的运动的定性探讨里，有很多有趣的问题。

例如，如果我们知道自很遥远时期以来小行星运动中发生了什么变化，我们便可以看出小行星形成时的情况。为了说明起见，我们提出在小行星研究中的一个有趣的问题。

在已经知道轨道很数并且登记入册的小行星中有98%，即1,700余颗，平均太阳距离（或轨道半长轴）在2.2A.U.（3.3亿公里）与3.6A.U（5.4亿公里）之间，周期的范围在3.2到7年之间。但是这些平均距离并非均匀分配的。譬如，

在平均距离近到3.27，2.84与2.5 A.U之处，差不多没有小行星。有这样平均距离的天体，轨道周期分别等于5.9，4.8与4.0年，对应于木星的周期的1/2，2/5与1/3。

这意味着，小行星象是回避与木星周期可公度的轨道周期。这便是在小行星与太阳平均距离的分布上造成所谓"环缝"。

在距离太阳比主群多少远些的地方，有两群很有趣的小行星。这两群环绕太阳的轨道周期与木星的公转周期可以公度。其中一群现在已有16个成员，其平均太阳距离约为4.0A.U，公转周期接近8年。这叫做"希尔达(Hilda)群"(以其中一员的名称命名)。另一群已知有14个成员，叫做"特罗央 (Trojan)●群"；它的成员的名称都从荷马的史诗《伊利亚特 (Iliad)》所描绘的战争的英雄命名：例如阿基里斯 (Achilles)、奥德赛(Odysseus)和赫克托(Hector)等。它们的平均太阳距离与木星的平均太阳距离约略相同(大约5A.U.)，因而有大约相等的轨道周期（接近12年）。

自然产生了一个问题：为什么在3.27，2.8和2.5A.U附近的小行星带上出现环缝呢？为什么小行星回避这些平均太阳距离的轨道？另一方面，为什么与木星轨道周期可以公度的8年和12年的轨道周期对小行星是这样适合，致使小行星演化成为具有这些周期的两群？

有两个可能的答案：

a)这些运动特性与小行星起源的条件有关；从它们"诞生"的时刻起，小行星的运动便有这种特性。

b)这些运动特性与小行星的原始条件无关，是在大行星

● 现已发现15颗，发现但未列入"星历表"的也有15颗。（译注）

的摄动影响下演变来的。

为了证实这些观点中这一个或那一个，我们必须探讨自遥远的过去以来的小行星运动的变化。例如，如果可能证明轨道周期为5.9，4.8与4.0年的小行星应当受到长期摄动，在几千年的历程内，可能逐渐改变这些轨道的周期，这便可以证实第二个观点。然后甚至可能对形成上述的小行星环缝所需要的时间和从而对小行星系的年龄作一个粗略的估计。反之，如果证明了这些小行星的轨道周期并没有纯粹的长期变化，因此在小行星运动的变化过程里不会出现环缝，于是我们可以认为环缝是在小行星演化中形成的。

这个问题已经探讨过，并且结果表明环缝显然是与木星的摄动影响有关的。如果木星的轨道周期与一颗小行星的轨道周期是可以公度的，木星的摄动比没有公度性的情形下要大得多（回忆上面分析过的木星与土星的相互摄动的例子，其轨道周期是可以公度的）。可是这还不是环缝来源的详尽无遗解释。

更复杂也是迄今更不成功的是对以上说过的两群小行星的长期摄动的研究。在这方面脱罗央群小行星是特殊的，这些小行星孤立于主群之外，并应当表现出一个有趣的图象（它与太阳和木星三点联线形成一个正三角形）。几百万年前它们在作怎样的运动呢？它们能否是无关的，但因其后通过它们的运动的变化而形成一群吗？这一群将来保持原样呢，还是长期摄动将改变它们的轨道周期和半长轴，而终于解体呢？这些问题的答案将给我们关于脱罗央群的可能年龄的概念，并有助于阐明它们的原始情况。

有相似轨道的小行星群的形成问题，由于有很多这样的群而特别引起我们的兴趣，甚至有一个假说，说所有的小

行星都是在一个大行星分裂中形成的；而小行星的各个群落，看来是这颗分裂的大行星的较大的“碎片”反复分裂的结果。但是，近来的研究表明：大行星分裂假设是不成立的，因为，这种偶然的机会是太少了。

有趣的是，一方面，要找出这些小行星群能否作为大行星的摄动的结果而形成；另一方面，行星产生的长期摄动能否逐渐导致这些群的解体（如果它们发生在小行星系的形成过程中）。这样的探讨能在某种程度上证实成否定目前的假设。

遗憾的是，在这些性质的研究中，我们遇到尚待克服的数学上的巨大困难。有关天体运动的定性探讨的问题，远比有答案的问题多。而且这些有趣的问题都与天体起源与演化学有密切的联系，目前已经在研究，只是重视不够。这些问题的较完满的解决只能有待于将来。

月球和火卫的研究也是令人兴奋的问题。但是在这些例子里，必须考虑的不仅有牛顿引力的作用，而且有潮汐摩擦的作用。

我们已经讲过潮汐的摩擦力逐渐使地球的自转减速，这里还应当发生平均月-地距离缓慢的增长的现象，这意味着月球在早期比现今更接近地球。如果地球的自转周期每百年增长0.001秒，那么月球对于平均月球距离，现今的增长率应当是每百年2米。当然这是一个微不足道的数字，但是如果考虑到几千年和几百万年的历程中地球和月球的运动，那么潮汐摩擦在月球和地球运动上引起的变化就成为颇能觉察得到的了。

据英国天文学家乔治·达尔文（George Darwin）所作的计算判断，约在40亿年前，月-地距离只有14，000公里，而

地球日之长只有5小时。在20世纪初达尔文甚至提出，地球与月球本是一体，后来某一个时期月球才从地球分离出去。据这个假说，将来月球应当继续离开地球，而地球日将继续变长。几十亿年以后，月-地距离将增长50%，月球的公转周期（月）将增长到47日（即628时），而地球日之长也将同样增加。达尔文还说，在这阶段里潮汐摩擦应当对月球运动产生相反的效应：月球将开始接近地球。最后，月球可能和地球这样接近，以致为地球的引力在月球上引起的巨大潮汐撕破为碎块。在这最后一个阶段里，月球的轨道周期（月）将保持短于地球的自转周期（日）。

遗憾的是，目前还很难说这个假说究竟真实到什么程度。至于过去，月球是否曾从地球分离出去，这是很可疑的。俄罗斯数学家略普诺夫（Lyapunov）所作的探讨表明，月球从地球分离出去是不可能的。而且达尔文研究月球在未来的演变的时候，除了引力之外，他没有考虑其它任何可以影响地球和月球运动之力。然而，对于漫长时间里天体运动的研究，必须考虑地球和月球乃至整个太阳系的物理结构上可能发生的变化。但是，即使这样，我们却须承认潮汐摩擦作用可能是影响极长时间内天体运动，特别是行星和卫星系统中的动力学演化的一个重要因素。

关于潮汐摩擦对于卫星运动的作用的假说，有助于火卫的研究。卫星是太阳系里最显著的对象。首先，它们与自己的主星（即它所隶属的行星）很接近：火卫一福波斯距离火星的中心9,380公里，仅是火星的直径的1.5倍，距离火星表面只有5,930公里；火卫二戴莫斯距离火星23,500公里，相当于火星直径的3.5倍。另外一个有趣的现象是：火卫一围绕火星运行一周的时间比火星日的三分之一还短（火星的自

转周期是24时37分，而火卫一的轨道周期仅约7时39分）。换句话说火星上的一个月（按火卫一判断）比火星上的一天还短。如果地球有类似这样的一个卫星，它便会从西到东而不是从东到西运行，即从西方升起而下落于东方，这便和其它天体（包括人造地球卫星）的周日视运动完全相反。

据达尔文的理论，卫星的轨道周期（月）首先比它的主星的自转周期（日）长，卫星逐渐远离主星。然后在某一阶段，离开到一定距离，卫星开始逐渐接近主星。在这阶段里，每月的时间比每天的时间还短。卫星可能极接近它的主星。

第一个印象是火卫一是处在演化的后期：火星上的一个月（对火卫一说）比火星上的一天还短，而火卫一与火星很近。据这个体系，火卫一将继续接近火星。

另一方面，据达尔文的假说，火卫二应当是处在离开主星的第一阶段，因为火星的一个月（对火卫二说）等于30时18分，比火星的一天长。

据1879～1941年间进行的观测（两个火卫发现于1879年）证实这样一个事实：火卫一的轨道周期逐渐缩短，每年平均约为0.00025秒钟（根据美国天文学家沙普勒斯（B.Sharpless）的报告）。由这数对应于火卫一的轨道半长轴每年缩短6.46厘米（即每世纪6米）。于是一亿年后的火卫一将降落在火星上，因为半长轴a的缩短，将少于目前火卫一到火星表面的平均距离。

一个复杂的因素是火卫一轨道上这样大的长期摄动的原因，但还是一个谜；那就是英国天文学家杰弗里斯(Jeff-reys)对于火星内部结构加以理论的研究以后，求出潮汐摩擦只能使火卫一的半轴缩短达到观测值的1/1000。其它天文学家还指出行星际物质也有减速作用。这类似于地球大

气对于人造地球卫星的减速效应。同时苏联天文学家巴里斯基（N.Parysky）发现：如果我们假定火星和地球的物质有相同的粘滞性，那么潮汐就能够在火卫一的半长轴缩短量上产生与观测值相近的效应，这与杰弗里斯的理论计算有差异，可见这还是一个需要进一步讨论的问题。

火卫运动的问题，作为天体力学的最有趣的一个定性问题，仍然留在日程上。

23、恒星的运动与引力定律

恒星在天球上的分布日复一日地保持原样，即使在人的一生里也看不出它们的位置有什么改变。这便是古人把它们叫做“恒星”的缘故。我们很难找到另外一个比它更适当的名称。使用强大的仪器对恒星位置作仔细的测量，表明一切恒星都在天上运动，这些运动一部分是由于我们在运动的地球上观测恒星而造成的。但是也有一部分是由于恒星自身的真正运动以及太阳带着整个行星系在空间的真正运动。由恒星本身和太阳系的运动造成的恒星的视位置的移动叫做“自行”。恒星的自行很小，大多数只有每年0″.01，这实在是一个很小的角，仅等于一根头发在两公里外所张的角！只有少数恒星的自行才达到每年1″；其中“最快”的“速逃星”每年移动4″到10″的还不到十颗。这便是为什么肉眼观测（精度不超过2′）不能发现（即使在一、两百年内）大多数恒星有什么运动。但是将相距几百年的恒星位置的观测记录加以对比，便较容易测出它们的自行。中国古代的天文学家就用这个准确的方法发现了恒星的运动，正如中国编年史所记载的。

但是欧洲人却不知道中国天文学家的这一卓越发现。●

1718年英国天文学家哈雷注意到三颗亮星（天狼、南河三和大角）的位置与古希腊天文学家的观测比较，已经发生了改变。

将这几颗星的观测位置和希腊天文学家喜帕恰斯（公元前一世纪）的数据比较，哈雷发现天狼移到了1°.7，南河三0°.7，大角1°.1。这是它们在18个世纪里移动之量。

18世纪之末发现了双星系的轨道运动。

用肉眼观测，双星与别的恒星并没有什么区别。但是在望远镜里人们发现每个双星都有两颗分离而接近的星相距不超过几个弧秒。18世纪末和19世纪初赫歇耳首先对双星作了基本的研究。他发现，双星系里的成员星相互在作相对运动。他发现了几百对双星，目前有记载的双星系已经超过两万。

什么力支配着双星，而迫使它们互相绕转运行呢？

恒星正与太阳一样，是白炽的气体球。它们是具有质量的物体，应当按牛顿定律互相吸引。恒星的运动的确遵守引力定律，这件事在双星的观测上得到有力的证实。

双星系里，通常一颗星比另一颗明亮。亮的一颗叫做主星（或母星），暗的叫做伴星（或子星），对它们的相对位置的仔细测量，表明伴星围绕主星在一个椭圆上运动。而且这种运动总是遵循开普勒第二定律（即面积定律）。这意味两星在相互吸引的作用下运动。但是，也许这种力并不服从牛顿的引力定律（即平方反比定律）吧？不，19世纪中期三个法国数学家阿尔方（Alphand）、达尔布（Darboax）和伯

● 据《唐书·天文志》记载，僧一行(683～727)所测的廿八宿距星去极度数和以往不同：从牵牛到东井十四宿都是古代的数值大，而唐代的小，其余十四宿则相反。梅文鼎便根据这个记载，认为僧一行首先发现了恒星的自行。（译注）

特兰（Bertrand）给出有力的证明：恒星应当严格地遵守牛顿定律相互吸引。他们说明，暗星围绕亮星在椭圆上的运动，可能有两种情形：

1）如果引力按距离的正比例增加，亮星应当处在暗星的椭圆轨道的中心。

2）如果按牛顿定律（与距离的平方成反比）变化，亮星应当处在暗星的椭圆轨道的一个焦点上。

在一切引力取决于距离的其它情况下，伴星不能围绕主星作椭圆运动。

观测表明，亮星永远不在暗星所走的椭圆的中心。这便排斥了第一种情况。而且这种情况在物理上讲是不可能的：我们很难想象一颗星对于另一颗星的引力随距离而增长。因此我们认为，这种吸引是按牛顿定律，而双星系里两颗星的运动应当按以前讲过的互相吸引的两体问题那样运动。牛顿引力定律的应用的一个光辉的验证，便是天狼伴星的发现。1844年白塞尔（Bessel）注意到天狼星在天空的自行轨迹成波浪形。他因此断言，天狼星有一个看不见的伴星，而且这两颗星应当在相互吸引的作用下围绕它们的公共引力中心各在一个椭圆上运行。白塞尔确定了这颗看不见的伴星的轨道，而且估计出它的质量。1862年白塞尔死后，在20年前所预言的天狼伴星终于为人发现了。它的轨道大体上就是白塞尔算出的轨道。

双星之外，还发现每个由三颗、四颗或更多颗星组成的**聚星系**。聚星系里的成员星彼此相当接近，并在相互的引力下运动 聚星系成员星的运动相当复杂，因为这不是两体、而是多体的问题了。聚星系运动理论的研究目前还刚刚开始。

差不多一切肉眼所见的天上的星，都是一个巨大星系一

银河系——的成员。银河系里大约有1,500亿颗恒星，从侧边看整体是一个透镜状的结构（图64）。银河系的直径约100,000光年而中心附近最稠密的部分约厚6，500光年。●

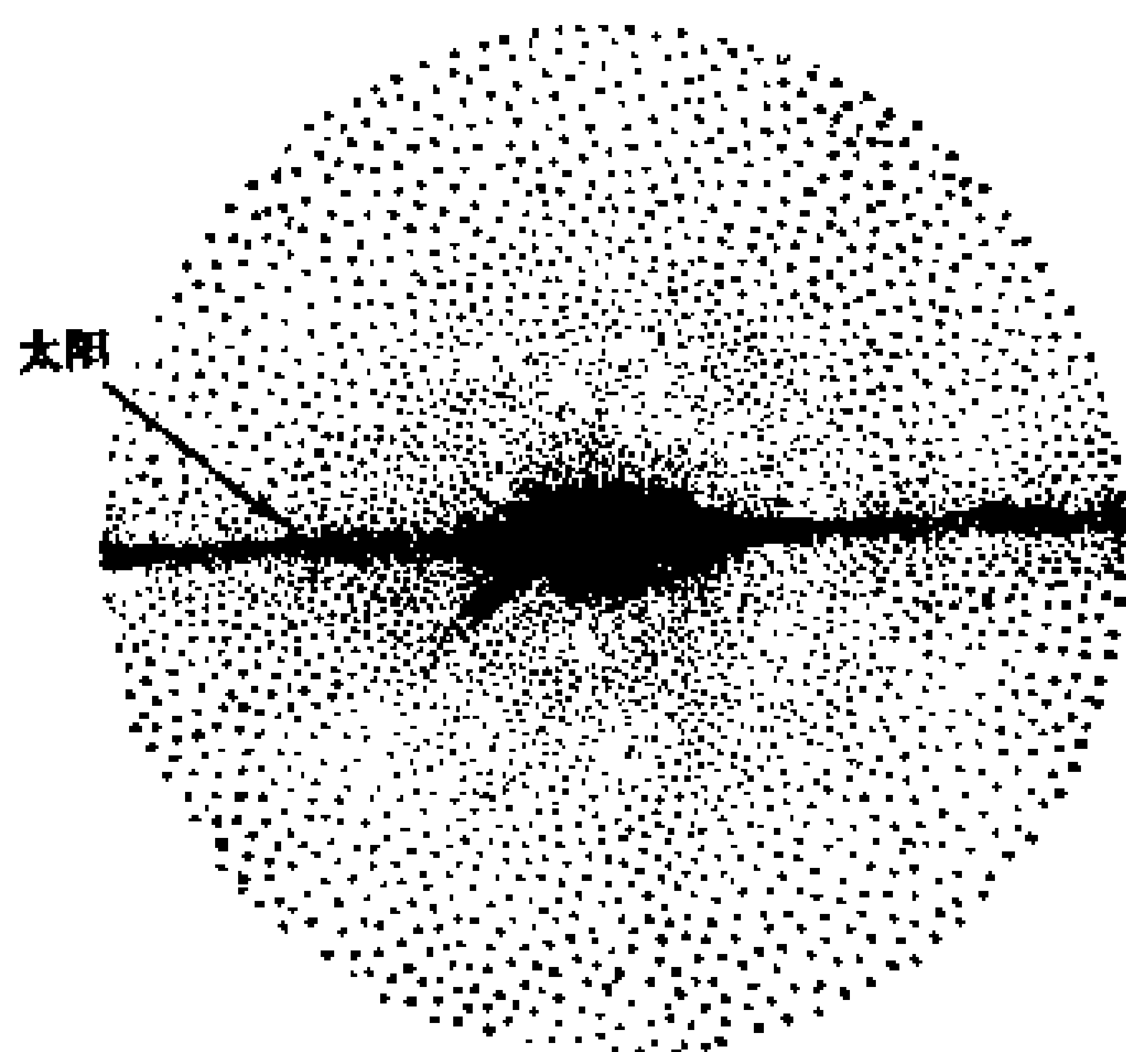


图 64 银河系横剖面示意图

由此可见，银河系里的星主要汇聚在叫做银道面的平面上。太阳和它的行星系位于银道面附近，距离银河系中心32，600光年处。因为太阳系位于银道面附近，所以我们看见的大部分恒星在平行于银道面的方向上。环绕天穹的银河里的发光斑点是银河系里恒星主要堆积区。从垂直于银道面的方向看，平均地讲我们能看到的恒星要少得多。

银河系里的恒星怎样运动呢？

观察到的天上恒星的自行，乍看之下象是没有任何体系。但是对于恒星的运动加以仔细而长期的研究之后，便知

● 光年是光行进一年的距离，约为9.5×10^{12}公里。太阳的光到地球只需8分18秒！

情况根本不是这样的。如果不管各个恒星或星团的运动的各自的特性，就平均情况而言，所有的星都围绕银河系的中心循同一方向运动，因此银河系看起来围绕它的中心在自转。当然，这不是本身上的"自转"。每个星各有其独立的运动，其速度随其对中心的距离而变化——愈远的星平均说运动愈慢——只是由于恒星的运动主要发生在一个方向上这个事实，而使这些运动整体地才给人以自转的印象。

支配恒星运动，而使它们围绕银心旋转之力，是互相吸引的牛顿万有引力。每颗恒星都受到银河系中亿万颗其它恒星的总引力的作用。因为银河系里的星形成一个对于银心对称的系统，所以这个总引力指向银心。每个星都受到向心的引力。但是，这引力随银心距离和银道面距离而变化的定律，却是异常复杂，我们还远没有理解。自然，这种情况下我们还不能说引力严格地遵守牛顿定律（即与中心距离的平方成反比的定律）。

星系引力定律的问题，可以从两个角度去研究。首先便是理论研究。如果1，500亿颗星中每一颗星各占一定的空间，所有其它星都根据牛顿定律吸引这颗星，那么就可以从理论上去计算这颗星受到什么样的引力。这样就产生了不只是数学上的困难，还有一些根本上的困难，因为我们尚未确切地知道这1，500亿颗星区空间是怎样分布的，由于没有这种知识，我们便不可能对这些星的引力作精确的计算。这只能在某一假设下作近似的计算。例如，最简单的假设银河系的星是均匀地分布的，或者假设恒星密度的分布按某一确定的定律，随着与银心的距离而变化。

这问题的第二种研究可以叫做经验研究。这方法是利用观测到的恒星的运动，来确定应当引起这些运动之力（即从给

定的运动决定力的问题）。苏联天文学家巴列拿哥（Parenago）便用这个方法，证明银道面内的星被银心吸引之力可以表示为：

$$F \sim \frac{R}{(1+aR^2)^2},$$

式内R表示星的银心距，a是常数。对于银道面外的星的引力定律，表达式还要复杂得多。

当然，在探讨中需要考虑综合这些理论的与经验的方法，并利用观测结果比较与天体力学理论的成就的差异。

作为结束我们关于恒星运动的讨论，可以说万有引力不但支配着太阳系行星的运动，也支配着遥远的恒星与星系的运动。

24、万有引力是什么

引力性质的问题，在牛顿发现他的定律之时便提出来了。什么是万有引力？这个问题已经困扰了许多代的科学家。究竟什么因素在使质点互相吸引？这一类的问题很不容易回答。就物理的观点看，万有引力是很难了解的。因此牛顿定律一提出便引起人们的怀疑。许多科学家企图推翻它，甚至否认引力的存在。经过一段时间，这些疑团消逝了。大家承认了牛顿定律。可是引力的性质仍然弄不明白，甚至是神秘的。

这问题的复杂性究竟在哪里？

首先，引力表现有一种**超距作用**。事实上，引力在两物间的作用，不管他们之间的距离怎样远，都能达到；也不管

它们之间是空的空间。牛顿的同时代人认为这违背常识；即物体间的作用必须通过接触（即运动由推、压、拉等方式而传递）。牛顿自己提出这样一种观点：引力在物体间传递是通过“以太”，以太是一种独特的稀薄介质，它充塞于物体间的整个宇宙空间以及一切固态物体的缝隙内。

牛顿以后的一些科学家力图对引力通过以太的作用作比较详细的解说。

还有人主张引力是在空间四面八方运行的看不见的“超粒子”在物体上造成的机械作用。如果有一物体孤立在空间内，那么它便会受到这些“超粒子”从四面八方而来的均匀冲击，因而它处于平衡状态。但是如果有两个物体，它们便会互相遮蔽在两体联心线上运动的粒子，而其它粒子流量便可能推动这两体，使它们彼此接近而形成它们之间的引力。

在某些假说里，这些“超粒子”的作用又被以太流的类似作用所代替。

这些假说的倡导者都力图取消引力的这种神秘的超距作用。但是他们却无法解释引力的其它奇怪性质。

这些性质之一便是引力作用的表现瞬时性。

事实上，应用牛顿定律时，我们认为引力只取决于物体间的相对位置，这些位置一改变引力的大小便立刻改变，这意味着引力是即时地传递的。如果现在这作用的传递是通过某种介质（以太）的作用，我们便需要求出这种作用在介质里的传播速率。同样，如果引力是看作由于运动着的“超粒子”或以太流所致，那么便必须确定引力传播的速率。而如果情况真是这样，那么计算物体间的引力时，我们便必须引入这个速率的修正数，因为如果在时刻 t_0，物体A到达位于与物体B的距离为r处；在这个时刻A将不能以与$1/r^2$成正比

例之力吸引B（按引力以一定的速度传播的条件）。引力由A传到B需要一定时间。但是在这时间内A可能到达空间的另一点了。

因此，每一时刻，这力不但取决于天体的组态，而且取决于它们的速度和引力的传播速率。如果没有这样的修正，那么我们应当观测到天体的实际运动对于根据牛顿定律算出的结果偏离。但是，事实上并没有观测到这种偏离。只有引力传播的速度大到它对于运动没有影响，即事实上必须将引力的传播看做是瞬时的，才能发生这种偏离。拉普拉斯计算出引力传播的极小速度，它可能对在天体（例如月球）的观测中不能觉察的速度作修正。结果得到引力速度在量级上至少是光速的100万倍。这样一种质点运动速度或物理现象在介质内的传播速度的存在，在现代物理学上是不可能的。

其次，引力是一种公认不能阻挡的力。它不能为星际介质或遇见的天体所损耗或吸收。例如月食时地球从日、月两球之间通过，要是它能遮断它们之间的引力，正如它能遮蔽太阳的光线那样，那么太阳对于月球的引力在月蚀时便会衰减，我们便可能确定在月球运动中应该产生的摄动。但是我们却没有观测到这种摄动。

没有任何已知的用作为屏蔽的物质能部分有效地阻挡把一切物体吸引向地心的引力。

我们怎样想象一种粒子或稀薄的介质，既能即时传播，又能穿透一切未经检查的物质，而不起任何变化呢？

我们在自然界里哪里遇见过这样的粒子、粒子流或物理现象和过程的这种传播方式呢？可见光、x射线、无线电波、电子和磁力，都或多或少地被物体（介质）所吸收，而且这一切都以有限的速率（光速）而传播。由此可见，基于

以太、以太流或粒子流的简单机械作用的引力的原始机械解释，都不能说明引力的奇特性质。今天引力的这些解释，看来都是太幼稚了，并违背了现代物理概念。但是我们怎样解释这个奇异的、渗透一切的、而且在一定距离上瞬时起作用的引力呢？

一位现代的伟大科学家艾伯特·爱因斯坦（Albert Einstein，1879～1955）提出了答案，爱因斯坦在物理学的许多领域里曾作出大量卓越的贡献，不过他的最大的成就是**狭义相对论**（也可叫做时-空理论）和**广义相对论**（或更适当地叫做引力理论）。这些理论在我们的空间和时间的概念和有关物体的运动以及时-空和引力的相互关系等上，造成巨大的改变。狭义相对论证明，空间与时间有密切的关系，而且任何物体的质量是和它的能量关联的。广义相对论表明，我们周围世界的时-空性质（即它的**几何学**）都由物体决定。

遗憾的是，狭义和广义相对论都很难用通俗的语言来解说。这一方面是由于理论本身，和由于数学上的复杂性；另一方面是由于相对论推出某些想不到的结论常和我们"常识"的概念有根本的背离。可是，我还是力图想给读者一点相对论的粗略概念。

在**经典力学**（即伽俐略和牛顿的力学）中，空间、时间与空间的物体之间没有相互的关联。空间中发生的各种过程，由均匀流逝的、而与空间和空间内的物体无关的时间来计量。空间（作为物体的被动容器的唯一效果）总是恒定不变的，与物体的分布无关，甚至与有无物体存在无关。这种空间的几何学是欧几里得几何学，即大家在学校里学过的几何学。这种几何学主张，空间任何两点间的最短距离是直线；

一束光从空间的一点走到另一点准确地遵循直线。在经典力学里，物体的质量也是恒定不变的，物体的几何性质（如长度、宽度、形状等）也是这样，不管物体是运动的或静止的，这些性质总是一样。

然而，这些概念虽然为我们日常经验所证实，大家习惯成为自然，而不感觉丝毫奇怪，但是相对论却认为只是真实事物的近似反映。大自然好象已经在空间、时间和物质之间建立起一种意义深刻得多的相互关系。在有物体的空间里，欧几里得几何学不再有效。物体的质量和它们的几何性质取决于它们的运动速度。物体运动性质被看做是空间的几何性质，而不是引力作用的结果。

试回忆惯性定律。如果没有扰动的外力，物体将维持静止或作匀速直线运动。让我们用实验去校核这个定律。大家知道，在地面的情况下，在推动力中止作用后，使一个运动的物体停下来的主要原因是摩擦。让我们设想没有摩擦力，这物体是否将作匀速直线运动呢？答案是否定的，因为这物体将受到地球、月球、太阳系行星的引力。我们再进一步设想搬开整个太阳系、最近的恒星甚至银河系里的一切星；这样，我们便会感觉到，这物体将极精确地作匀速直线运动。但是如果有一颗星（或任何一个有质量的物体）在我们所说的物体的附近，那么它所经行的轨迹便不再是直线；由于这颗星的引力面使物体的轨迹成了曲线。

现在试比较以下两种情况。第一个情况是，一个孤立的物体在空间沿直线运动。只要物体在“空无所有”的空间里运动，我们便可以说，这种空间的几何性质使物体在其中的路径都是直线，而不论这运动指向何方。第二种情况是，物体不在真空的空间而在其它物体的引力场里运动。在这种情

况下，物体的路径便是曲线。这等于说，物体（质量）的存在改变了空间的几何性质：没有物体的空间是平直的，这事实反映于在一切方向上孤立物体都能按惯性运动。可是如果有物体（质量）存在，空间便成为弯曲的。● 就是空间的这种非平直性，它的"曲率"被我们看成了引力。

因此，根据爱因斯坦的理论，引力是世界（宇宙）的时-空性质的一种表现；物体的分布决定了它们所在的空间的几何学，也决定这些物体的运动。

在这些概念的指导下，爱因斯坦用数学发展了他的理论，而得到一系列卓越的结果，而且这些结果得到实验的充分证明。

爱因斯坦的工作解释了引力以巨大的速率传播和具有惊人的穿透能力。但遗憾的是，这些问题的说明需要用很高深的数学远远超出这本通俗小册子的范围。因此我们在这里只谈爱因斯坦从理论上推出，后来又从实践上被光辉地证实的广义相对论的两个卓越的结果。

据爱因斯坦的理论，不只是物体，而且光线也受质量的引力作用，因此光线在天体附近经过时，也应当偏离其直线轨迹（尽管偏离很微小）。换言之，光线不是在一条笔直的直线上传播。读者初次听到这句话时一定会感觉奇怪，而认为与地球上的日常经验不合。可是爱因斯坦却证明这是正确的。日全食时，人们可以看见太阳边缘附近的恒星。精密地

● 按空间的"曲率"，我们认为在弯曲的空间里，两点间的最短距离不是直线，而是曲线。为了说明，设想有一平面和一球面。我们分别在这两种面上测量两点间的距离。我们可取一根细线去做这个测量，即以这线去联接这两点，而量这段线的长度。在平面上这段线是一段直线，而在球面上这段线便是曲线，即球面上某一大圆周长的一段弧线。

测量这些星那时的位置，表明它们不在平常的位置上，而向太阳稍微移动（图65）。这个位移很小（约2″），但是却与爱因斯坦理论所预言的完全符合。

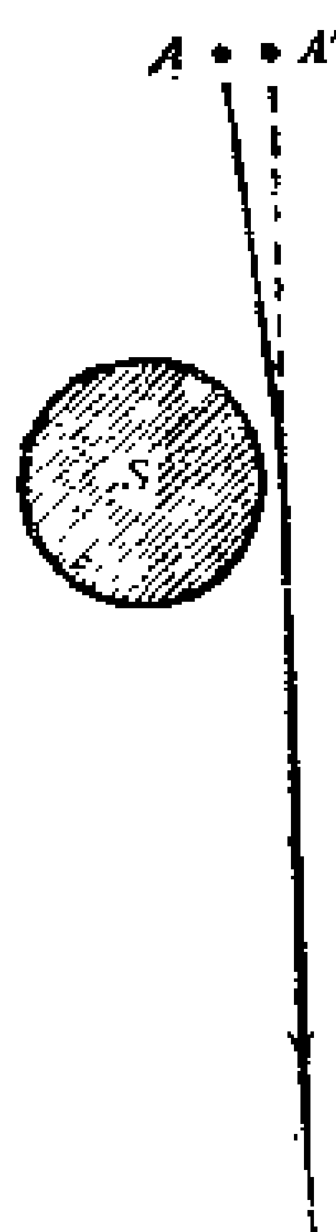


图 65 太阳附近一线光的偏离。由A星而来的光线受到太阳引力场的弯曲，这颗星似向太阳移动到位置A′。

爱因斯坦的引力理论也为水星运动的某些特性所证实。

远在19世纪中期，勒威耶便注意到水星的观测位置与据牛顿理论所推出的位置稍微有点差异（即使将其它行星的摄动都计入以后）。这差异在水星轨道的拱线的长期运动上，数值很小：水星的近日点每世纪内的运动，比由经典力学所推出的约快43″。这问题成为天体力学上许多研究的对象。为了解释水星的进动，有人提出牛顿定律不是完全地正确，引力并不恰好按距离的平方反比而变化。但是如果对牛顿的平方反比定律的改动有助于调和水星进动上的计算和观测的话，那么这又会在其它行星的理论和观测之间产生分歧。还有其它解释这种差异的一些建议，但是没有一个得到所需预期的结果。

“只有爱因斯坦的引力理论才为水星的这种神秘的运动提供了线索。这个理论在两体（太阳和一个行星）问题里，行星的椭圆轨道应当在空间里缓慢地旋转。这旋转运动的速率取决于太阳的质量和行星的距离。对于水星言，据相对论计算，拱线应当每世纪转过43″，这正是水星运动早期理论所不能说明的量。因此以前的疑团竟成了大行星分析理论的精确性和爱因斯坦引力理论的正确性的出色证实。

虽然爱因斯坦的相对论改变了我们关于空间、时间、物体的运动以及它们之间的相互作用的日常观点，而且就其基础言，也与经典力学和牛顿的引力理论有根本分歧，而在实际应用上，对于大多数情况，却得到相同的结果。但是发生在哪些情况下呢？这只出现在物体运动的速度比光速（每秒30万公里）相当小时，以及我们所处理的物体质量比较小时。如果我们不计入物体的运动速度v与光速c之比即我们把 v/c 当做零时，爱因斯坦的方程式和比值便完全转变为经典力学里的一般形式，于是包括牛顿引力定律在内的经典力学的概念，都成为正确而有效了。为了这个缘故，我们讨论地面上物体的运动以及太阳系里行星、小行星、卫星乃至银河系里的天体的运动时，由于它们的速度都比光速小得多，因此由牛顿引力定律所得的结果与据爱因斯坦理论所得出的结果便很接近。但是仍然有一点儿差异。如果我们既有一个根据牛顿引力定律的确切理论，又有由长时期观测而得到的足够精确的数据，这些差异是可以探测出来的。水星近日点的进动便是一个例子。

如果我们讨论质点由于地面附近的重力而造成的运动，因地球质量比较小而使爱因斯坦效应实际都不存在了。但是我们若要研究这样一个质点在太阳面上的运动，由于太阳质量相当大，这些效应便是应该考虑的。

在这一点上，我们可以问：爱因斯坦理论是绝对正确的吗？当然不是，因为自然现象的数学理论，没有一个能够计入并描绘自然现象的无限复杂性和不可计数的相互关系。任何具体的科学理论都不过是真实的近似写照，是人类向深人研究自然现象前进一步。牛顿的引力定律是研究天体相互作用的第一步。爱因斯坦的理论是真实的较深刻的反映，但也还不过是在追求真理的无尽征途中，向前更跨进了一步。

附　录

本书3、4两章内曾经引用几个定理，而没有给出证明。这附录内，将陈述在牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》内对于这些定理的证明。在这种情况下只用初等数学是不够的，牛顿使用他所发明的奠定高等数学（微积分学）基础的新方法。但是牛顿将这些复杂的方法表示为相当简易的几何学形式，使没有现代形式的高等数学知识的读者也能了解。我们便使用这种几何学的方法论证以下几个定理。

定　理　I

围绕一个固定力心旋转物体（作为质点看）的向径扫过的面积，处在同一固定平面上，并与扫过的时间成正比。

证　明

设以S表示固定的力心，P表示在这中心力的吸引下运动的物体（图66）。首先，假设力不是连续地作用在P点上，而是在等时段Δt内受到瞬时的冲量。再以t_1，t_2，t_3等表示中心S的力起作用的等间隔的时刻。

在第一时段内（由t_1到t_2），引力未起作用，物体P因惯性在一直线上以速度v_0均匀地运动。走过一段距离$P_1P_2 = v_0 \cdot \Delta t$；在第二时刻$t_2$，P将达到$P_2$；如果在这一点，P不受

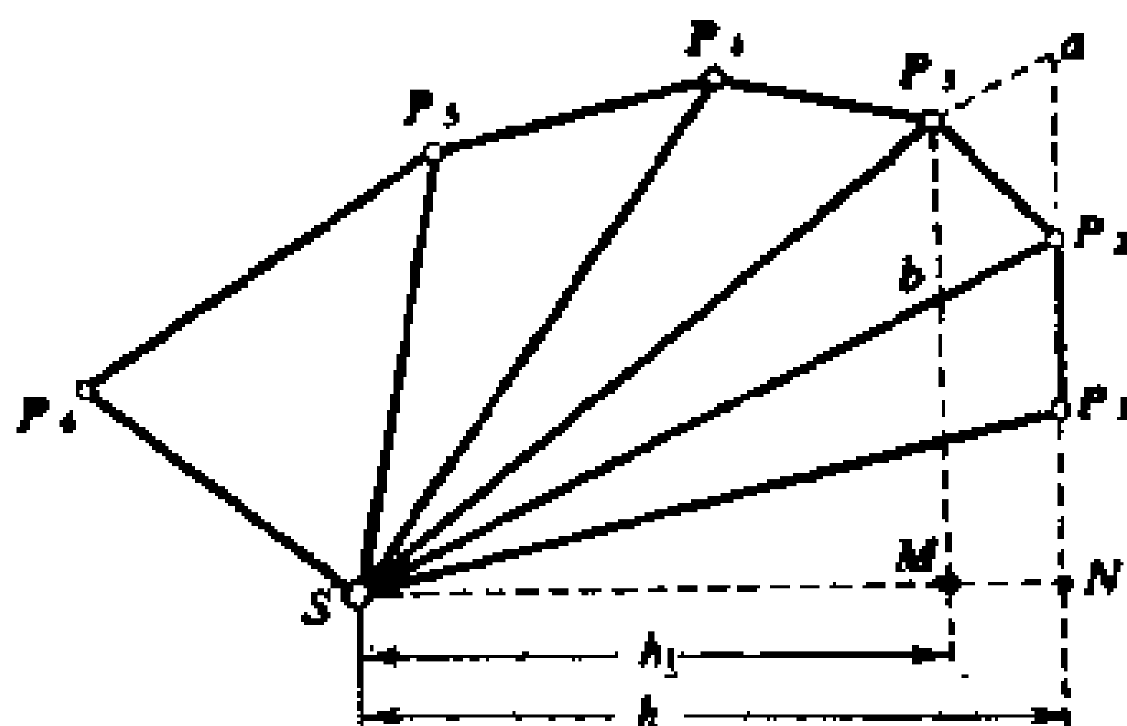


图 66 定理 I 的证明

力的作用，它便以相同的速度v_0继续沿P_1P_2线运动。在时刻t_3它便会达到一点a（$P_2a=P_1P_2$）。但是据定义，当P点在时刻t_2到达P_2之际，它立刻受到引力的作用（牛顿写道"立刻受到一个大的冲量"）。这力使物体在P_2S方向上加速，而偏离P_2a方向上的直线运动。但是因为这个力即时停止作用，所以这物体立刻在P_2S方向上，得到另外一个附加速度v_1，然后再作等速直线运动，（但是这时速率和方向都和前次不同）。因此，物体P在t_2至t_3时段内的速度将是P_2方向上的速度v_0与P_2S方向上的速度v_1的合速度。如果物体只以速度v_0运行在Δt时间它走过的距离便是P_2a；而如果它只有速度v_1，它在这段时段内，便走过$P_2b=v_1\cdot\Delta t$。但是由于这两个速度的合成，而使这物体在以P_2a和P_2b为两边构成的平行四边形的对角线P_2P_3上运动，在由t_2到t_3的时间内它将达到P_3点。

自然对角线P_2P_3与P_2a和P_2b处在同一平面上，即处在由t_1到t_2的时段内物体所运动的SP_1P_2三角形的平面内。

设以h与h_1分别表示三角形SP_1P_2与SbP_3的高SN与SM，则$MN=h-h_1$将是三角形bP_2P_3的高。三角形SP_1P_2的面积便等于$\frac{1}{2}h\cdot P_1P_2$。三角形SP_2P_3的面积便是SbP_3的面积

加bP_2P_3的面积。但是因为

$$bP_3 = P_2a = P_1P_2$$

所以三角形SbP_3的面积等于$\frac{1}{2}h_1 \cdot P_1P_2$而三角形$bP_2P_3$的面积等于$\frac{1}{2}(h-h_1) \cdot P_1P_2$这样。

$$面积SP_2P_3 = \frac{1}{2}h_1 \cdot P_1P_2 + \frac{1}{2}(h-h_1) \cdot P_1P_2 = \frac{1}{2}h \cdot P_1P_2$$

因此三角形SP_1P_2与SP_2P_3的面积相等。

根据相似的推理，可以知道，如果引力瞬时地作用在P_3，P_4，P_5……等点上，并使物体沿P_3P_4，P_4P_5线段上移动，那么这些线段必然处在一个平面上，而三角形SP_2P_3，SP_3P_4……等的面积必然相等。但是所有这些三角形的面积都是由力心S指向物体P的向径在等时间内所扫过的面积。

现在让我们所取的时段，不在相邻时刻之间，而在相间的时刻，例如t_1与t_3和t_3与t_5之间，这些时段也是相等的。在时段t_1t_3内物体P将在折线$P_1P_2P_3$上运动，而在时段t_3t_5内在折线$P_3P_4P_5$上运动。$SP_1P_2P_3$与$SP_3P_4P_5$两图形的面积将相等，因为它们是等值三角形。一般情况里，不管我们取在任何等间的力作用时刻之间的什么样的相等时段，物体P的向径都将在这些时段内扫过相等的面积。

现在让我们逐渐缩短这些冲量之间的时段。冲量便逐渐接近于连续不断的作用力。而线段P_1P_2，P_2P_3……的长度也将缩短，以致物体所走的折线将与一条平滑曲线相差得愈来愈少。但是由此推出的运动的性质将保持不变，因为这些截线的长短对于推导并没有什么影响。总之，我们可以使冲量随意接近于连续作用力，而使折线随意接近于在S的引力作用下物体所走的实际曲线，而且已经证明的性质都将维持

不变。因此，这将适用于极限情况，这时冲量间的时段Δt趋近于零，即适用于连续作用力的情况。物体P将在一个平面内，沿凹面向S的一条曲线上运动。在相等的时段内，向径SP应当扫过相等的面积。换句话说，给定一个中心力下，向径扫过的面积与时间成正比。这些面积等于乘积k（$t''-t'$），式内k是单位时间内所扫过的面积，叫做面积常数，而$t'-t''$是一个对应的时段。这样，我们便证明了定理Ⅰ。

定　理　Ⅱ

如果一物体在一平面曲线上运动，向径引向某一固定点，在等时段内扫过的面积相等，那么这个物体就受到一个指向这个定点的力的作用（定理Ⅰ的逆定理）。

证　明

图67表示定点O和质点P运动轨迹的一段。在这曲线上，以a_1，a_2，a_3……表示P在等段时刻t_1，t_2，t_3……上所在的位置，并将a_1，a_2，a_3……等点与O点联接，于是将扇形Oa_1a_n分成很多个小扇形。一方面，只要时间是相等的，那么任何两个扇形就都相等。另一方面，只要各段弧a_1a_2，a_2a_3……等都很短，短到与这些点之间的直线段相差很少，那么这些扇形的面积就与对应的三角形Oa_1a_2，Oa_2a_3……等的面积根本没有

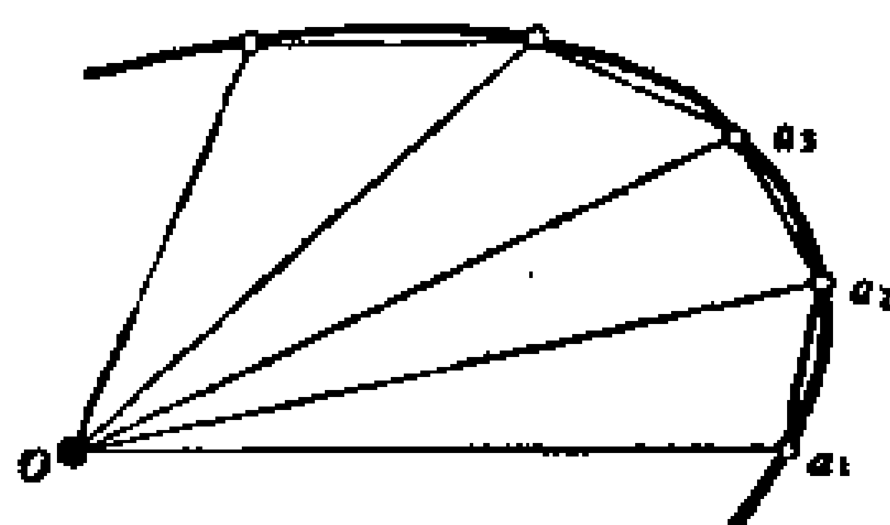


图 67　定理Ⅱ的证明

差别。

在极限的情况下，时刻t_1，t_2，t_3……之间的时段接近趋于零时，这些扇形与三角形的面积之比等于1。因此达到极限时所有的三角形的面积都是相等的。

现在设以折线$a_1a_2a_3$……a_n上的运动代替曲线上的运动。但是我们将折线上的运动看作是由于在t_1，t_2，t_3……各瞬时的冲量，而不是连续力的作用力所发生的。以下的推理与定理Ⅰ内的推理相似。

为了使意义清楚，图68表示路段$a_1a_2a_3$的放大情况。在t_1t_2的时段内，物体（质点）P走过线段a_1a_2，于时刻t_2达到a_2点。延长路段a_1a_2一倍到点b。如果物体（质点）没有受到力的作用，那么它就会进一步沿a_2b运动，并在时刻t_3到达点b。但是在时刻t_2，物体（质点）因力的作用改变了运动的方向，质点就在时刻t_3达到a_3点。ba_3线段决定因t_2时刻中心为S的作用而来的附加速度的方向，即给定时刻该力的方向。作a_3c平行于a_2b，并比较Oa_1a_2与Oa_2a_3两个三角形。再作与定理Ⅰ内相同的计算，便可以表明这两个三角形的面积，只在图形a_2ba_3c是平行四边形时才是相等的。因此线段ba_3应与a_2c平行。

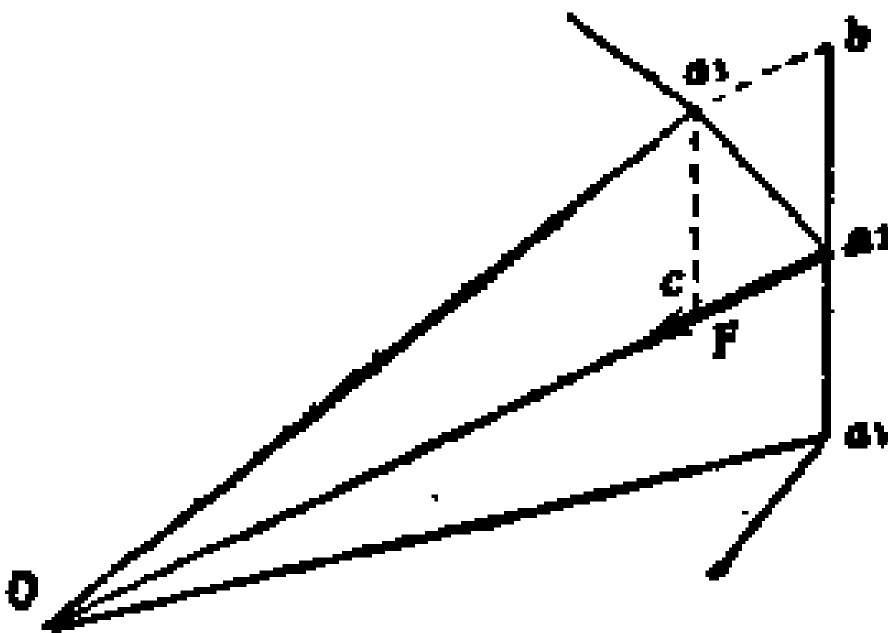


图 68　定理Ⅱ的证明

这样，P处在a_2那一时刻，吸引它之力应当在a_2O直线的方向上。对于随后的三角形加以相同的讨论，可以证明在时刻t_3的作用力应当在a_3O的方向上，依此类推。

现在让我们通过缩短时段Δt过渡到极限的情况。在极限的时候，不难看出：①沿折线的运动与沿曲线的真实运动重合；②所讨论的三角形的面积都彼此相等，并与对应的扇形的面积重合；③使P运动之力指向O点。换句话说，质点P在从O点发出的引力作用下运动。●

定 理 Ⅲ

如果一质点P因受位于椭圆的一个焦点上的中心S的引力作用而运动，那么，中心S用以吸引质点P的力，与PS间的距离的平方成反比。

证 明

我们将这定理的证明分为三个部分。①推导将固定中心S的吸引力，与物体P在其作用下所走的曲线的几何性质联系起来的一个重要公式；②考察椭圆的某些性质；③最后证明这个定理。

我们讨论一质量为m的物体P在中心S的引力作用下，在某一曲线上运动（图69）。设物体在如图69内箭头所指的方

● 注意66与67两图内折线之间的根本差异。图67内的折线$a_1a_2\cdots\cdots a_n$是内接于表示物体（质点）真实运动的曲线，而图66内的点$P_1P_2\cdots\cdots$一般不在运动物体（动点）所描出的曲线上，因此折线$P_1P_2\cdots\cdots P_5$对于曲线既非内接亦非外切。当Δt缩短，而趋近于零时，这些折线只是和曲线接近而已。

向上运动；在时刻t_0，P达到P_0点；在极短的时段Δt后达到P_1点❶。在P_0点作曲线的切线P_0N，如果在物体P达到P_0点的时刻，引力停止作用，物体将以与它在这一点所具有的一样的速度（方向和大小）继续前进；就是说，P将在切线P_0N上运动，并在时段Δt内达到N点。另一方面，如果P达到P_0的时刻完全失掉它的速度，那么由于指向S的引力，而使它只在P_0S方向上运动，而在时段Δt内，走过距离P_0M。

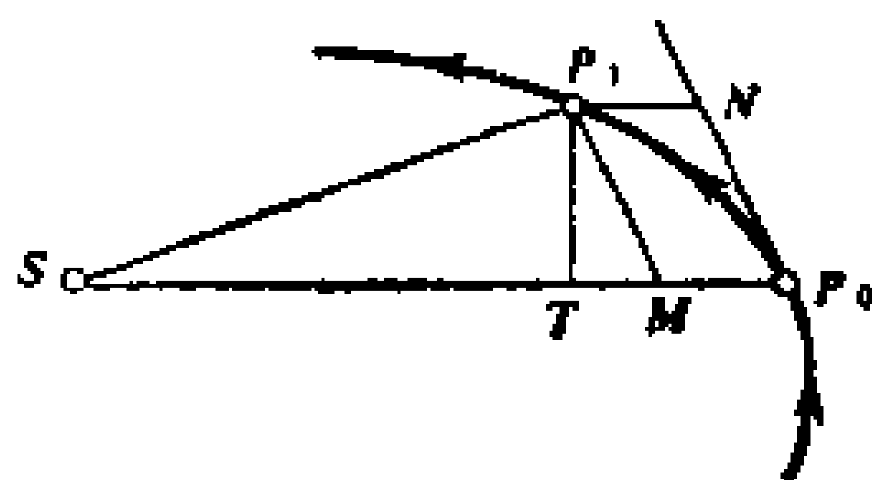


图 69 定理Ⅲ的证明

只要时段Δt和P点所走的距离P_0P_1都很短，我们可以将这个时段内作用于P上之力看作是没有改变。于是物体P的加速度j（按牛顿第二律，$j=F/m$）也没有改变。应用匀加速度运动里的著名的距离-时间关系式，我们求得：

$$P_0M=\frac{1}{2}j(\Delta t)^2=\frac{1}{2}\frac{F}{m}(\Delta t)^2。$$

更严格地推理，我们必须认为，当Δt趋近于零的时候，P_0M与$\frac{1}{2}\frac{F}{m}(\Delta t)^2$之比等于1。因为在这比值里$P_0M$与$\Delta t$是变数，而F与m是常数，所以比值$\frac{P_0M}{(\Delta t)^2}$的极限等于$\frac{F}{2m}$。

由于这两个运动的组合，而使物体P（在时间Δt内）将达到P_1，这一点应当是以P_0M和P_0N为两边的平行四边形的一个顶点。因此，$NP_1=P_0M$。

---

❶ 为了使读者概念明白，图69内弧线P_0P_1的长度故意大大放大。

此外，我们知道，中心吸引力所致的运动，遵守面积定律。因此扇形SP_0P_1与时间成正比：

$$\text{面积}SP_0P_1 = k\cdot\Delta t。$$

但是如果P_0P_1这段弧很短，那么扇形SP_0P_1的面积在数值上与三角形SP_0P_1接近，而等于$\frac{1}{2}SP_0\cdot P_1T$；达到极限时这两个面积便互相重合 。因此得：

$$\frac{P_0M}{(\Delta t)^2} = \frac{k^2P_0M}{(\text{面积}SP_0P_1)^2} = k^2\frac{N\cdot P_1}{\left(\frac{1}{2}SP_0\cdot P_1T\right)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}SP_0\cdot P_1T\right)^2}{(\text{面积}SP_0P_1)^2}。$$

这样，我们便知道，比值$\frac{P_0M}{(\Delta t)^2}$的极限$\left(\text{等于}\frac{F}{2m}\right)$与比值$4k^2\cdot\frac{NP_1}{(SP_0\cdot PT)^2}$的极限相重合。而引力本身在大小上等于比值$8k^2m\frac{NP_1}{(SP_0\cdot P_1T)^2}$的极限。

使用公认的数学符号，而且注意到，只有当P_0趋近于P_1时，NP_1与P_1T是变化的，我们可以写成：

$$F = \frac{8k^2m}{(SP_0)^2}\lim_{P_0\to P_1}\frac{NP_1}{(P_1T)^2}。$$ ●

这个极限值显然只与给定的曲线的几何性质有关。

● 符号$\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=a$，表示当$x$接近$x_0$时，$y(x)$接近等于$a$的极限值。

如果物体的轨迹已知，那么这个方程式就使我们能求出使物体运动之力的大小。

现在假设物体P运动所走的曲线是椭圆的一段弧（焦点在S，中心在O）（图70）。以a和b表示椭圆的两个半轴。引椭圆的直径P_0D[1]并延长直线P_1M直到它和直线P_0D相交于L点。于是据椭圆的性质，可以写出下列的比例：

图 70　定理Ⅲ的证明

$$\frac{P_1N}{(P_1T)^2}=\frac{a}{b^2}\cdot\frac{P_0D}{2DL}\cdot\left(\frac{P_1L}{P_1M}\right)^2 \qquad (1)$$

这比例式的推导过程如下：

通过椭圆的中心作与P_0D共轭的直径CG。平行于一给定直径的两端所作的切线（在这图上是通过P_0与D）而过O点的直径，叫做定直线的共轭径。引入符号a_1与b_1，即令$P_0O=a_1$、$CO=b_1$。

首先，试证明：如果E是直径CG与P_0S的交点，那么P_0E之长等于椭圆的半长轴a，据椭圆的性质，得知椭圆的切线与从两焦点到切点所引的两向径形成相等的角。

因此，如果把P_0和椭圆的另一焦点S′联接，而且将这条线延长与直径CG的延长线相交于F，那么$P_0E=P_0F$。作

[1] 椭圆的直径是通过中心联接椭圆周上的两点的直线。

$S'Q$平行于P_0S；三角形SOE等于三角形$S'OQ$，而$S'QF$是等腰三角形，因此$SE=S'Q=S'F$，又$SP_0+P_0S'=P_0E+P_0F$即

$$P_0E=\frac{SP_0+P_0S'}{2}$$

但是，对椭圆和$SP_0+P_0S'=2a$；因此$P_0E=a$。

因为P_0ML与P_0E_0两个三角形是相似形，所以得

$$\frac{P_0M}{P_0L}=\frac{P_0E}{P_0O}\quad 或\frac{P_0M}{P_0L}=\frac{a}{a_1}\quad 或\frac{P_1N}{P_0L}=\frac{a}{a_1}\qquad (2)$$

现在从P_0作P_0R与直径CG正交，并从P_1作P_1T与SP_0正交。因为P_1TM与P_0ER两个三角形是相似的，所以

$$\frac{P_1T}{P_1M}=\frac{P_0R}{P_0E}。$$

令P_0OF角$=\alpha$，据共轭直径的性质求得$a_1b_1\sin\alpha=ab$。在三角形P_0OR内，$P_0R=a_1\sin\alpha$。因此$P_0R=\frac{ab}{b_1}$，从而

$$\frac{P_1T}{P_1M}=\frac{ab}{b_1a}=\frac{b}{b_1}\qquad (3)$$

据共轭直径的性质，

$$\frac{OL^2}{a_1^2}+\frac{P_1L^2}{b_1^2}=1。$$

由这个等式得：

$$(P_1L)^2=\frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2-OL^2)=\frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1+OL)\ (a_1-OL)。$$

因为 $a_1+OL=DL$，$a_1-OL=P_0L$， 所以

$$\frac{(P_1L)^2}{P_0L\times DL}=\frac{b_1^2}{a_1^2}\qquad (4)$$

利用（2），（3）和（4）三个等式，从比值 $\frac{P_1N}{(P_1T)^2}$ 求得：

$$\frac{P_1N}{(P_1T)^2}=P_0L\frac{a}{a_1}\frac{b_1^2}{b^2(P_1M)^4}=\frac{aa_1}{b^2}\frac{1}{DL}\cdot\frac{(P_1L)^2}{(P_1M)^2}$$

$$=\frac{a}{b^2}\frac{P_0D}{2DL}\frac{(P_1L)^2}{(P_1M)^2}。$$

这样，我们便推出了所要求的比例（1）。

如果现在使P_1点接近P_0点，那么L点也将接近P_0点。同时M点趋向L点。这样，到极限$P_0\to P_1$时，便得

$$\lim_{P_0\to P_1}\frac{P_1N}{(P_1T)^2}=\frac{a}{2b^2}。$$

将此表达式与上面推出的力F的表达式比较，可见当P点在椭圆上运动时，

$$F=m\frac{4k^2a}{b^2}\frac{1}{(SP_0)^2}。\qquad (5)$$

因为当沿给定椭圆运动的时候，k、a与b三量都是常数，所以作用在P点上之力与P和S之间的距离按平方反比而变化，这就证明了定理。

定　理　IV

如果有几个质点由于中心（S）之力的吸引作用而在椭圆上运动，而且这力是随它们和S（焦点）之间的距离的平方反比而变化，那么这些物体的轨道周期的平方之比等于其半长轴的立方之比。

证　明

据定理Ⅱ，力心S吸引质量为m在距离r处的任何物体P所施之力为

$$F=m\frac{L}{r^2},$$

式内L是一个比例常数。

如果这物体在焦点为S的椭圆上运动，那么据定理Ⅱ的证明中得到的方程式（5）得知$L=4k^2a/b^2$，这里k是"面积常数"，其大小为椭圆上的运动速率所决定，而a与b是给定的椭圆的两个半长轴。这样，在沿几个不同的椭圆运动的情况下，面积常数与椭圆的两个半轴是不同的，但是比值$4k^2a/b^2$保持等于常数L的值。

在等于轨道周期T的时间内，物体P围绕S运行一周，它的向径所扫过的面积等于整个椭圆的面积πab。

据面积常数k的定义，

$$\pi ab=kT\text{或}T/a=\pi b/k。$$

将这等式平方：

$$T^2/a^2=\pi^2b^2/k^2,$$

并将得到的等式改写为下列形式：

$$T^2/a^3=4\pi^2b^2/4k^2a,\quad \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{L}。$$

总之，在沿几个椭圆运动的情况下，T^2/a^3保持不变。而如果有几个物体围绕力心S在不同的椭圆上运动，半长轴为a_1，a_2……，对应的轨道周期为T_1，T_2……那么

$$T_1^2/a_1^3=T_2^2/a_2^3=\cdots\cdots$$

定理IV即得证。

定 理 V

如果几个物体围绕力心S，在以S为中心的圆上作匀速运动，而且它们的轨道周期的平方与它们的正圆轨道半径的立方成正比，那么，这些物体为中心S吸引之力与它们与中心的距离的平方成反比。

证 明

利用定理Ⅱ证明中所导出的力的表达式（5），并且注意到：

$$a = b = P_0S = r,$$

r表圆半径，那便得

$$F = m\frac{4k^2}{r^3}。$$

这个关系式将作用力与面积常数和圆半径在数量上联系起来。因为面积常数与轨道周期的乘积是圆的面积，即$kT = \pi r^2$，所以F的表达式可以改写为

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$●

如果有两个物体，其质量为m_1与m_2，在半径为r_1和r_2的圆上运动，其轨道周期为T_1与T_2，那么

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{r_1 T_2^2}{r_2 T_1^2}。$$

● 据等速圆运动的加速度的表达式$\omega = v^2/r$，可以推得相同的结果。这个方程式首先为惠更斯所提出(1673)，牛顿又独立地发现了它。

而如果运动满足开普勒第三定律：

$$\frac{T_2^{\ 2}}{T_1^{\ 2}}=\frac{r_2^{\ 3}}{r_1^{\ 3}},$$

那么

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{r_2^{\ 2}}{r_1^{\ 2}}。$$

定　理　VI

位于一均匀结构的球面（或球壳）外面的一质点，被引力吸引向球心，此引力与该质点和球心之间的距离的平方成反比。

证　　明●

图71（a与b）描述两个相同的球面和两个被这些球面吸引的质点（单位质量的）P与p。

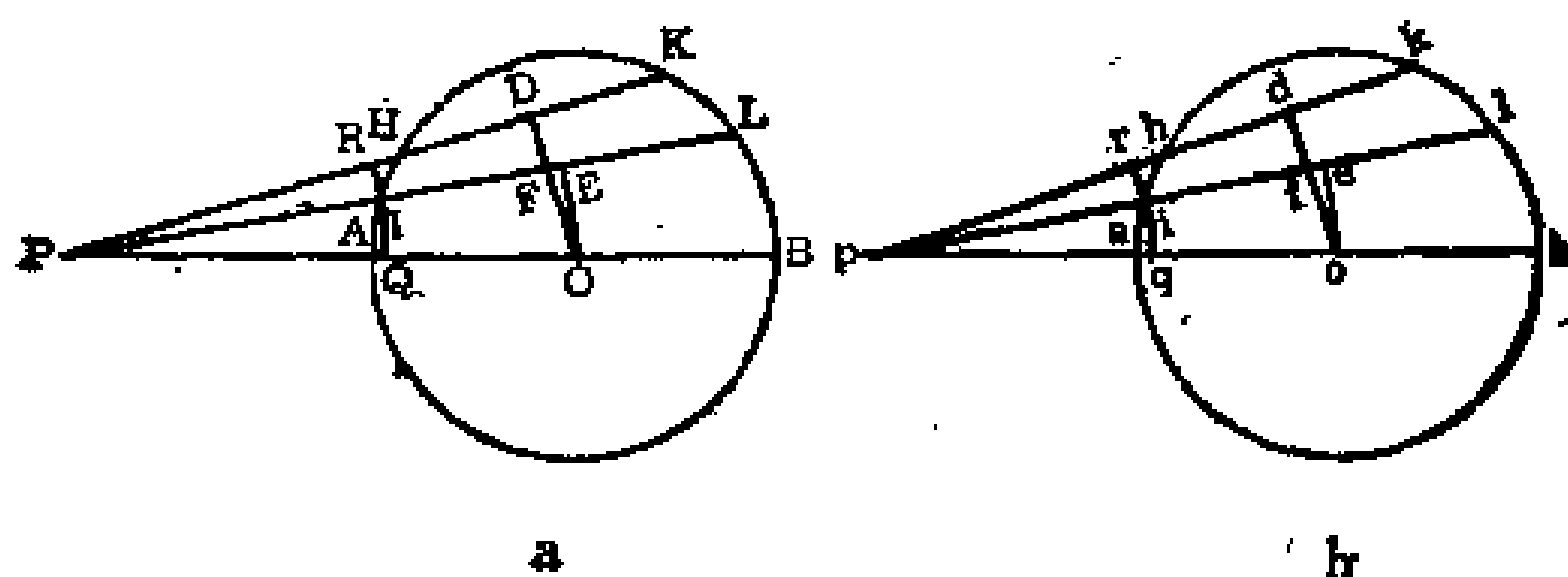


图 71 定理VI的证明

● 这证法是按照牛顿的方法而导出的。（译注）

设AHKB与ahkb为两个相等的薄球壳，其心分别在O与o。由p作两割线，在球面截出il与hk两段弧线，而且设KPL角到极限时趋近于零。再由P作割线PL与PK，在球面上所截之弧IL与HK分别等于il与hk。作oe⊥pl，od⊥pk，iq⊥pb，ir⊥pk。在图a内，同样作这四条垂线。

将这两个图形分别围绕直径PB和pb旋转，并设HI与hi由旋转造成的圆环的质量分别为M与m，于是：

$$HI \times IQ : hi \times iq = M : m \tag{1}$$

在I和i处单位质量的引力分别与PI和pi的平方成反比例。这些引力在PO与po方向上的分力是这两个引力分别乘以$\frac{PQ}{PI}$和$\frac{pq}{pi}$。设A′与a′分别表这些引力指向O和o的分量，则

$$A' : a' = \frac{1}{PI^2} \cdot \frac{PQ}{PI} : \frac{1}{pi^2} \cdot \frac{pq}{pi} \tag{2}$$

现在讨论这些环对于P和p的引力。它们的合力分别在O与o的方向上，因为这两个图形分别与PO和po对称，而且它们的质量为单位质量的M与m倍。设A与a分别表M与m的引力，则

$$A : a = \frac{M}{PI^2} \cdot \frac{PQ}{PI} : \frac{m}{pi^2} \cdot \frac{pq}{pi} = \frac{HI \times IQ}{PI^2} \cdot \frac{PF}{PO} : \frac{hi \times iq}{pi^2} \cdot \frac{pf}{po} \tag{3}$$

为了简化（3）式的右端，讨论PIR与PFD两个相似三角形和图（b）内两个对应的三角形。到极限时KPL与kpl两个角都趋近于零，于是因IL与HK分别等于il与hk，故DF∶df＝1。因此

$$PI : PF = RI : DF$$

$$pf : pi = DF\ (=df) : ri$$

这两个比例式的乘积为：

$$PI \times pf : PF \times pi = RI : ri = HI : hi \quad (4)$$

由PIQ与POE两个相似的三角形得：

$$PI : PO = IQ : OE$$

同样 $$po : pi = OE\ (= oe) : iq$$

这两个比例的乘积为：

$$PI \times po : PO \times pi = IQ : iq \quad (5)$$

于是（4）（5）两式的乘积为：

$$PI^2 \times pf \times po : pi^2 \times PF \times PO = HI \times IQ : hi \times iq$$

因此方程式（3）变为：

$$A : a = po^2 : PO^2 \quad (6)$$

故圆环吸引球壳外的质点的引力指向球壳的中心，其强度与质点-中心间的距离的平方成反比例。同样可以证明KL和kl的环状物的引力也是这样。

现在使PK与pk从和PB与pb直径重合处，旋转到和球壳相切处。在各个位置上结果是一样地真确，因此对于整个球壳（6）式都属有效。故薄球壳对于质点的引力的合力指向球心，而强度随质点与中心间之距离的平方反比而变化。

定理VI的推论

位于密度作球状分布的球外的一质点，被吸引向球心，此引力与质点和球心之间的距离的平方成反比。

证　明

我们先将这个实体球分割为大量的薄球层，每层的密度可以看做是均匀的。据定理VI，每层吸引球壳外的质点的

引力，与质点-中心间的距离平方成反比。由于整个球体的引力是各球壳层的引力的总和，因此全球的引力的合力也指向球心，在数值上也遵循这个规律与质点和球心的距离的平方成反比。因为任一质点的引力与它具有的质量成正比，所以说，球心处有一个质量与整个球体的质量相等的质点（重心或质心），它对球面外一质点的引力正与整个球体对于这质点的引力相同。

更推广一步，密度作球状分布的两个球体的相互引力，等于这两个球的质心的引力，即两球之间的引力与两球的质量的乘积成正比而与两球中心之间的距离的平方成反比。

译 后 记

天体力学是研究天体运动的科学。它的建立、发展和应用及其对于哲学的影响，在科学文化史上，有极其深远的意义，因而成为广大读者所应具有的知识。但是，要深入了解这门学科，必须具备高等数学的知识。本书是为只具有中、初级文化水平的读者而编写的，只需懂得初等数学的人便可以阅读，而且可以通过它去获得一些天文学的基本知识，并了解力学的初期发展史。

本书是根据英文译本（出版于1961年）、并参考俄文原著而翻译的。其中陈旧的数据，已经由译者更换为近几年的较新的数据。太阳系人造天体等章，也由译者参照该书1977年新版译出；并增加了我国的《东方红》号等人造地球卫星的参数，以供读者参阅。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝天体力学浅谈
作者＝
页数＝２０１
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝６０３７６１２８

封面
书名
版权
前言
目录
正文